2.2 Hopf-Bifurkation

Idee: Fixpunkt ändert seine Stabilität und ein Grenzzyklus (periodische Orbit) wird geboren

Normalform: $\dot z = \Big(\underbrace{\lambda + i\omega}_{\text{linear}} - \underbrace{(1+i\gamma)\,|z|^2}_{\text{nichtlinear}}\Big)\, z$, $z = x+iy \in \mathbb{C}$

in Real- und Imaginärteil: $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\dot x + i\dot y = \left[\lambda + i\omega - (1+i\gamma)(x^2+y^2)\right](x+iy)$$

$\Rightarrow$ Re: $\dot x = \lambda x - \omega y - (x^2+y^2)(x - \gamma y)$

Im: $\dot y = +\omega x + \lambda y - (x^2+y^2)(\gamma x + y)$ $\Big\}$ nicht sehr kompakt!

Fixpunkt: $x^* = y^* = 0 = z^*$

$\Rightarrow \delta\dot z = (\lambda + i\omega)\,\delta z$, oder in Re/Im: $\begin{pmatrix} \delta\dot x \\ \delta\dot y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{pmatrix}}_{=\underline{A}} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$

komplex konjugiert:

$\delta\dot{\bar z} = (\lambda - i\omega)\,\delta\bar z$

$\Rightarrow$ Eigenwerte: $(\lambda-\Lambda)(\lambda-\Lambda) + \omega^2 = \Lambda^2 - 2\lambda\Lambda + \lambda^2 + \omega^2 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \Lambda_{1,2} = -\frac{-2\lambda}{2} \pm \sqrt{\lambda^2 - (\lambda^2+\omega^2)} = \lambda \pm i\omega$

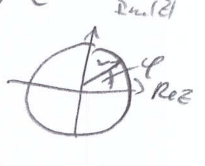
$\Rightarrow$ FP: $z^* = 0$ $\begin{cases} \text{stabil für } \lambda < 0 \\ \text{instabil für } \lambda > 0 \end{cases}$

$\mathrm{tr}\,\underline{A} = 2\lambda$, $\det \underline{A} = \lambda^2 + \omega^2$

$\Delta = (\mathrm{tr}\,\underline{A})^2 - 4\det\underline{A} = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\omega^2 < 0$

$\Rightarrow$ stabilen ($\lambda > 0$) oder instabilen ($\lambda < 0$) Fokus

Transformation auf Amplitude r und Phase φ: $z(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)}$



$\Rightarrow \dot z = \dot r\, e^{i\varphi} + i\dot\varphi\, r\, e^{i\varphi} = \left(\lambda + i\omega - (1+i\gamma) r^2\right) r\, e^{i\varphi}$

$\Rightarrow$ Re: $\dot r = (\lambda - r^2)\, r$ $\qquad \Rightarrow r^* = 0$ oder $(r^*)^2 = \lambda$

Im: $\dot\varphi\, r = (\omega - \gamma r^2)\, r \Leftrightarrow \dot\varphi = \omega - \gamma r^2 \Rightarrow \dot\varphi = \omega - \gamma\lambda \Rightarrow \varphi(t) = (\omega - \gamma\lambda)\, t$

$\Rightarrow$ Fixpunkt: $r = 0$

Grenzzyklus: $r = \pm\sqrt{\lambda}$, $\varphi = (\omega - \gamma\lambda)\, t \Rightarrow z(t) = \pm\sqrt{\lambda}\, e^{i(\omega-\gamma\lambda)t}$

Stuart-Landau-Oszillator $\qquad$ Periode $T = \frac{2\pi}{\omega - \gamma\lambda} \Rightarrow T(\lambda=0) = \frac{2\pi}{\omega}$

Lineare Stabilität des Grenzzyklus via Floquet-Theorie

$\dot{z} = f(z)$ mit periodischem Orbit $z^*(t) = z^*(t+T)$, T: Periode

$$\Rightarrow \delta\dot{z}(t) = Df\big|_{z^*(t)} \delta z(t) \quad \text{mit} \quad Df\big|_{z^*(t)} = Df(t) = Df(t+T)$$

lineare Differenzialgleichung mit periodischen Koeffizienten

$$\Rightarrow \text{Lösung:} \quad \delta z(t) = \sum_j c_j e^{\Lambda_j t} u_j(t) \quad \text{mit } u_j(t) = u_j(t+T) \text{ (Floquet-Mo}$$

und $\Lambda_j \in \mathbb{C}$: Floquet-Exponent

$$\Rightarrow \Lambda u + \dot{u} = Df\, u, \quad \delta z(t) = \mathcal{U}(t)\, \delta z(0), \quad \mathcal{U}(t): \text{Fundamentalmatrix}$$

$\mu = e^{\Lambda T}$: Eigenwerte von $\mathcal{U}(T)$ Floquet-Multiplikator

analytische Lösung von r und φ:

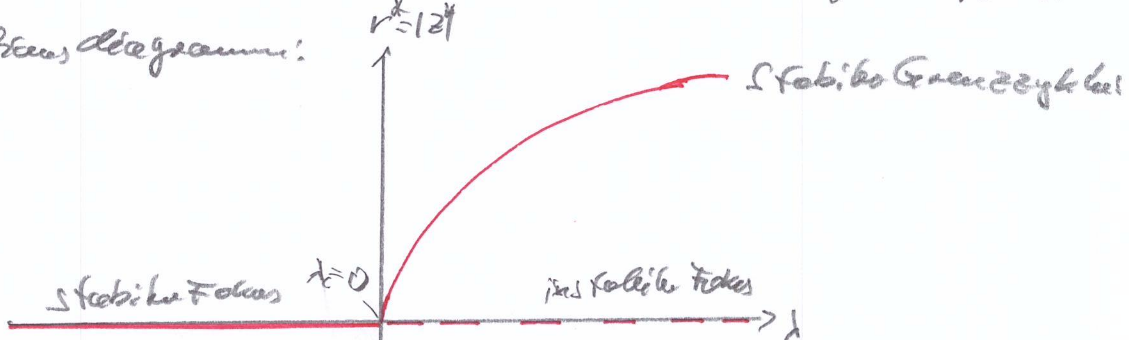
$$\begin{pmatrix} \delta\dot{r} \\ \delta\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 3r^2 & 0 \\ -2\gamma r & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{z^*(t)} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta\varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ -2\gamma\sqrt{\lambda} & 0 \end{pmatrix}}_{=\underline{A}} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta\varphi \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte von $\underline{A}$ (Floquet-Exponenten):

$$0 \overset{!}{=} (-2\lambda - \Lambda)(-\Lambda) = \Lambda^2 + 2\lambda\Lambda \Rightarrow \Lambda = \begin{cases} 0 \\ -2\lambda \end{cases}$$

Goldstone-Mode (Verschiebung entlang Orbit)
stabiler (transversaler) Floquet-Exponent

Bifurkationsdiagramm:



Superkritische Hopf-Bifurkation

Subkritische Hopf-Bifurkation:

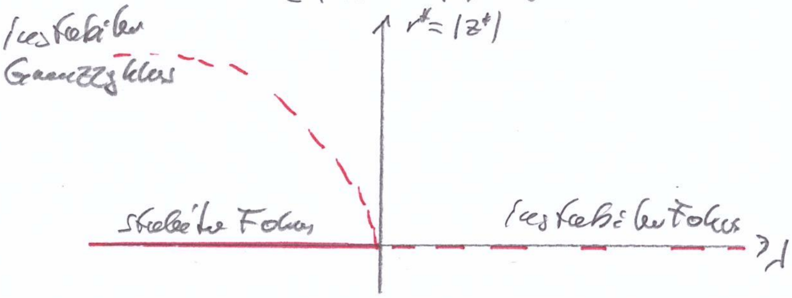
$$\dot{z} = \left(\lambda + i\omega + (1+i\gamma)|z|^2\right) z$$

$\Rightarrow$ FP: $x^* = y^* = 0 = z^*$ stabiler ($\lambda<0$) / instabiler ($\lambda>0$) Fokus

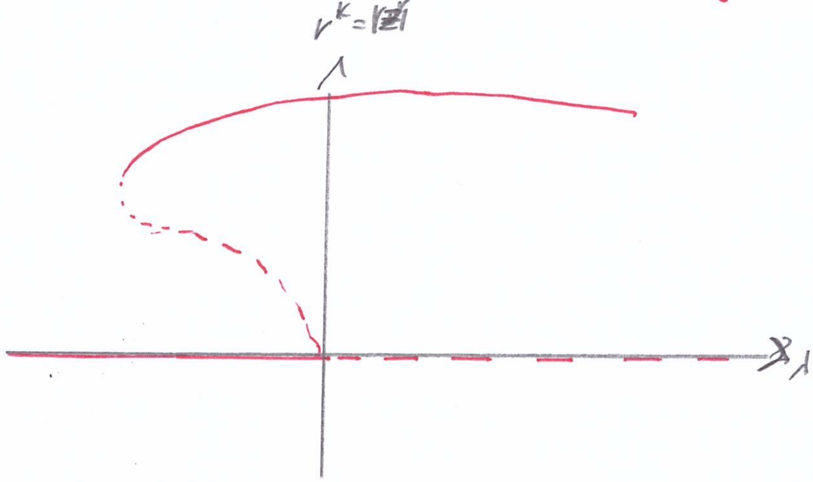
LC (limit cycle): $\dot{r} = (\lambda + r^2)\, r \Rightarrow (r^*)^2 = -\lambda \Rightarrow r^* = |z^*| = \sqrt{-\lambda},\ \lambda<0$

$\dot{\varphi} = \omega + \gamma r^2$

$$\Rightarrow z(t) = \sqrt{-\lambda}\, e^{i(\omega - \gamma\lambda)t}$$



häufig kombiniert mit einer Sattel-Knoten-Bifurkation eines Grenzzyklus



$\dot{r} = \lambda r + r^3 - r^5$

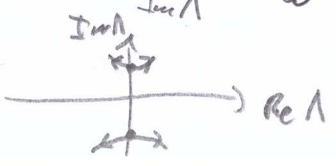
$\dot{\varphi} = \omega + \gamma r^2$

Merkmale einer Hopf-Bifurkation:

(i) Amplitude $\propto \sqrt{\lambda - \lambda_c}$

(ii) Periode: $T = \frac{2\pi}{\mathrm{Im}\,\Lambda} = \frac{2\pi}{\omega}$, Frequenz $\omega \neq 0$ (endlich!)

(iii) Eigenwerte:



Wechsel eines komplex konj. Paares in andere Halbebene, $\mathrm{Re}\,\Lambda \gtrless 0$