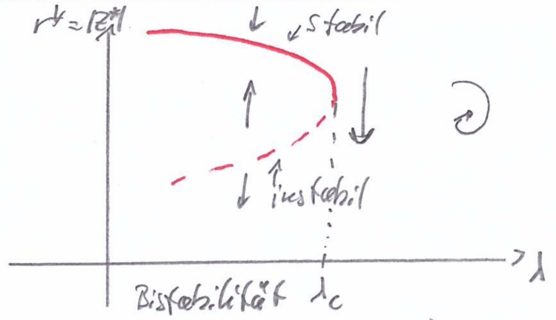
2.3 Lokale Bifurkationen von Grenzzyklen

1. Sattel-Knoten-Bifurkation (eines Grenzzyklus)
2. Perioden-Verdopplung
3. sekundäre Hopf-Bifurkation (Sacker-Neimark)

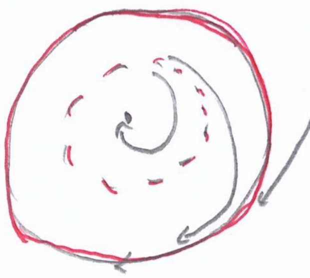
Bisher: Fixpunkt verliert/ändert sich und ein Grenzzyklus wird geboren.

Jetzt: Grenzzyklus entsteht aus einem Grenzzyklus

2.3.1. Sattel-Knoten-Bifurkation (eines Grenzzyklus)



Bistabilität von FP & LC (limit cycle)



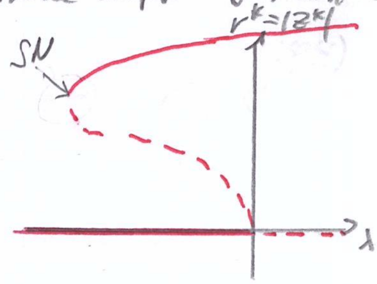
andere Namen:
- Kondensation von Pfaden
- fold bifurcation of limit cycles

Merkmale:
- Amplitude bei $\lambda_c \neq 0$
- Frequenz bei $\lambda_c \neq 0$

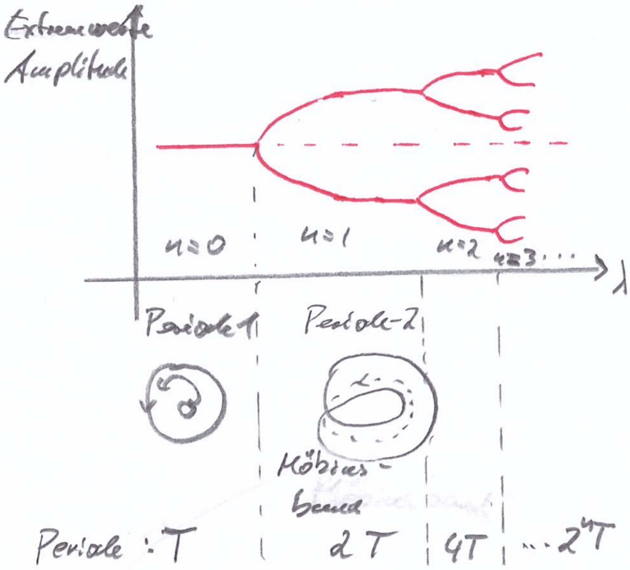
Bsp.: erweiterte subkritische Hopf-Bifurkation

$$\begin{cases} \dot{r} = \lambda r + r^3 - r^5 \\ \dot{\varphi} = \omega + \gamma r^2 \end{cases}$$

$z(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)}$



2.3.2 Perioden-Verdopplung



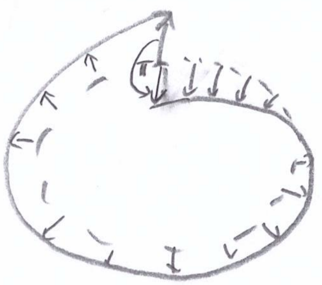
andere Namen:

- flip-Bifurkation
- Subharmonische Bifurkation

Merkmale:

- mindestens 3D Phasenraum
- Vorläufer von Chaos (→ Kap. 3)

→ phase flip von π nach einem Umlauf: Torsion benachbarter Trajektorien



Floquet-Exponent: $\Lambda = \lambda + i\omega$

am Bifurkationspunkt: $\lambda_c = 0 \Rightarrow \omega T = \pi$

$\Rightarrow$ Floquet-Multiplikator $\mu = e^{\Lambda T} = e^{i\pi} = -1$

häufig: Periodenverdopplungskaskade ins Chaos (→ Feigenbaum-Szenario)

↳ unendlich viele, instabile periodische Orbits der Perioden 2^nT $(n=0,1,2,\dots)$

2.3.3 Sekundäre Hopf-Bifurkation

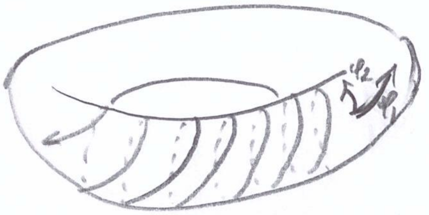
andere Namen:

- Neimark-Sacker-Bifurkation
- Torus-Bifurkation

Merkmale:

- inkommensurable Frequenzen: $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$ (irrational!)

  => Trajektorie schließt sich nicht, sondern läuft dicht auf dem Torus



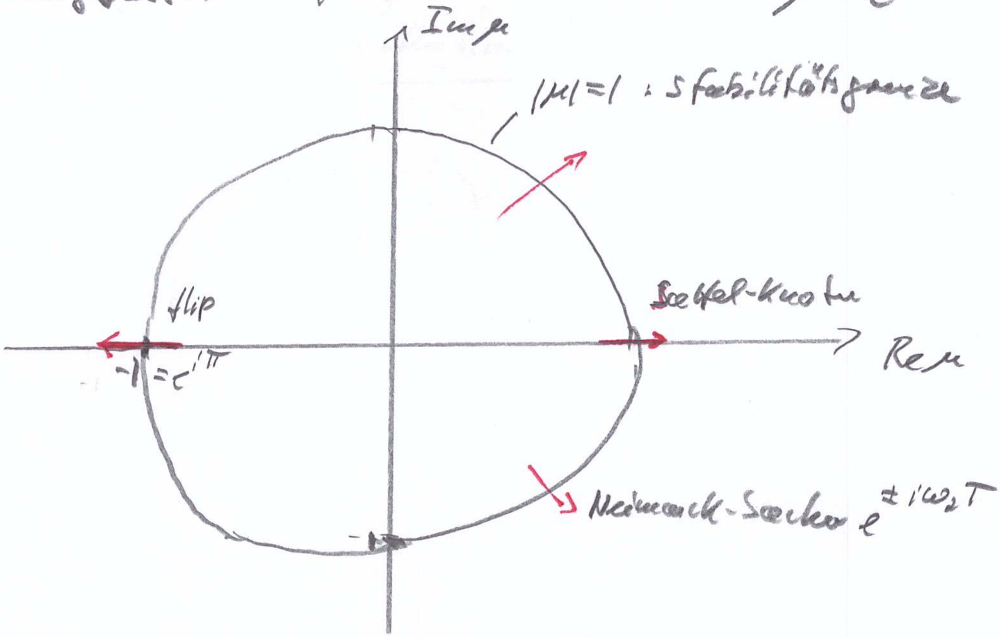
- Falls $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$ => geschlossener Orbit anstatt Grenzzyklus

  -> frequency locking, Modenkopplung

- ähnlich zur 1. Hopf-Bifurkation gibt es sub- und superkritische Fälle

subkritisch:

Zusammengefasst: Floquet-Multiplikatoren: $\mu = e^{\lambda T}$



Poincaré-Abbildung (first-return map)

$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$ mit $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ und S ein $(n-1)$-dimensionaler Schnitt, durch den der Fluss von F hindurchfließt.

Die Poincaré-Abbildung P bildet S auf sich selbst und $x_k \in S$ ist der k-te Durchstoßpunkt: $\underline{x}_{k+1} = \underline{P}(\underline{x}_k)$ (diskrete Abbildung!)

Bsp.: (i) $\underline{F}$ hat einen Fixpunkt $\underline{x}^*$: $\underline{P}(\underline{x}^*) = \underline{x}^*$, falls $\underline{x}^*$ in S liegt.

(ii) $\underline{F}$ hat einen Grenzzyklus: Durchstoßpunkt $\underline{x}^* = \underline{P}(\underline{x}^*)$