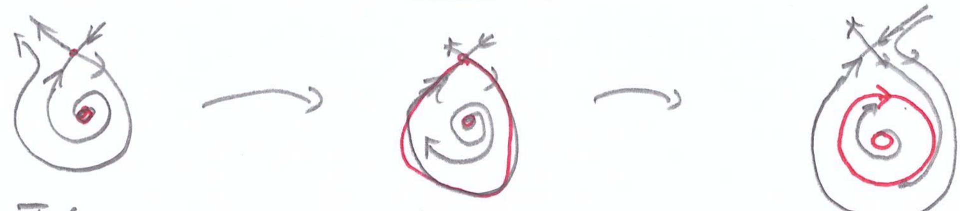
2.4 Globale Bifurkationen von Grenzzyklen

Jetzt: globale + qualitative Änderung des Phasenportraits

Bsp: Sattel + instabiler Fokus ⟶ homokliner Orbit

2.4.1 Homokline Bifurkationen (blue-sky catastrophe)

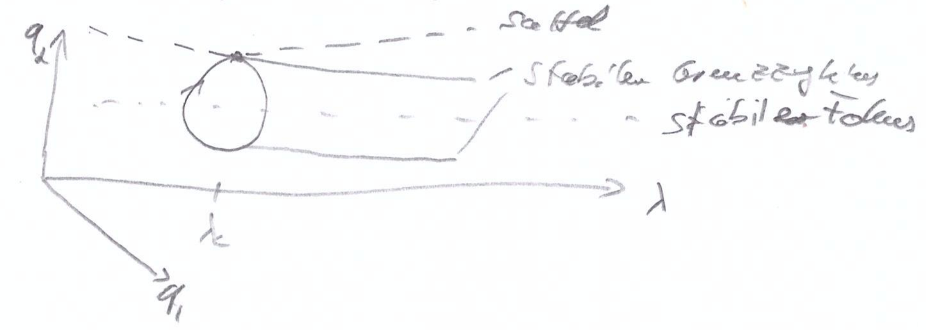


Sattel + Fokus — Sattel + homokliner Orbit — Sattel + Fokus + Grenzzyklus

Idee: Sattelpunkt kollidiert mit Grenzzyklus

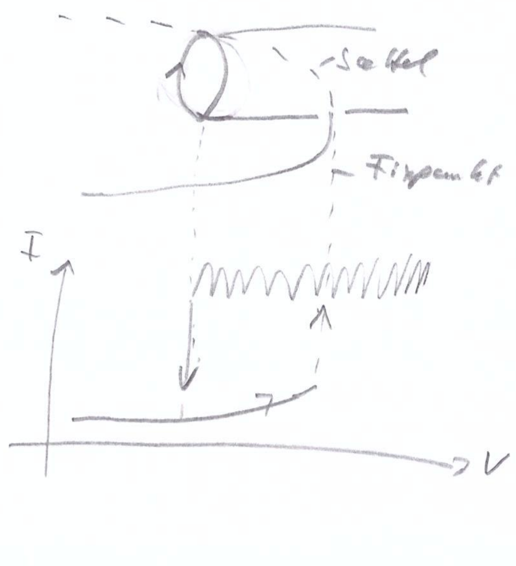
⇒ homokliner Orbit (saddle-to saddle loop)

Bifurkationsdiagramm (3D):



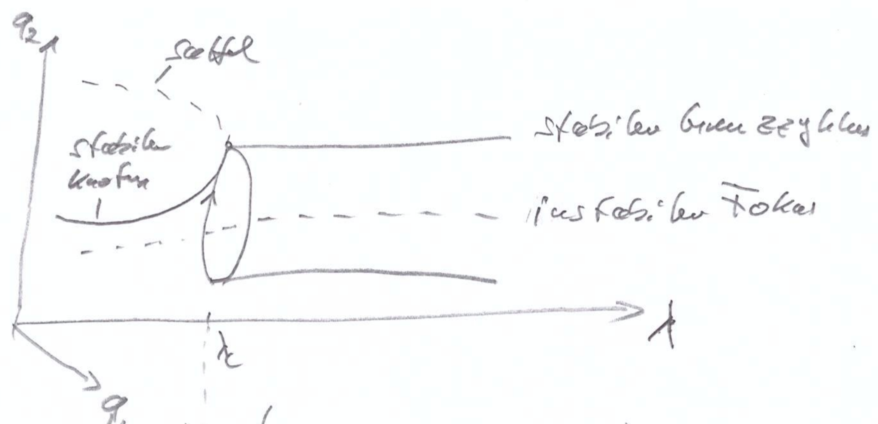
Bem: häufig kombiniert mit Bistabilität zwischen

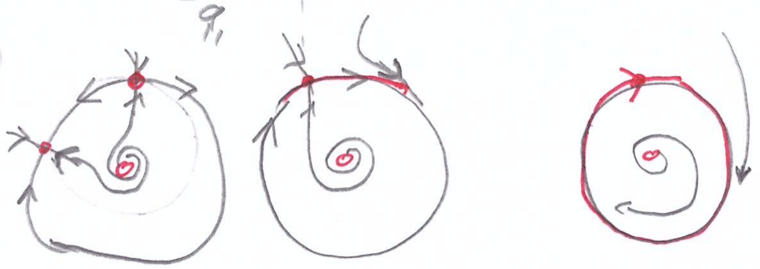
Oszillation und Fixpunkt:



2.4.2. Sattel-Knoten-Bifurkation auf einem Grenzzyklus

- Omega explosion
- saddle-node infinite period (SNIPER) bifurcation
- saddle-node on invariant cycle (SNIC) bifurcation





Idee: Sattel und Knoten kollidieren und einen Grenzzyklus entsteht

instabile Mannigfaltigkeit des Sattel $\triangleq$ Stabile Mannigfaltigkeit des Knoten

Kennzeichen: Amplitude bei $\lambda_c \neq 0$

Frequenz bei $\lambda_c \rightarrow 0$ (Periode $\rightarrow \infty$)

Einfaches generisches Modell einer SNIPER-Bifurkation

Ditzinger, Ning, Hu, Phys. Rev. E 50, 3508 (1994)

Hu, Ditzinger, Haken, Phys. Rev. Lett. 71, 87 (1993)

Bewirkungsbarkeit: Typ I (Typ II: Hopf-Bifurkation)

Normalform / einfache Gleichungen:

$$\dot{x} = x(1-x^2-y^2) + y(x-b)$$

$$\dot{y} = y(1-x^2-y^2) - x(x-b)$$

in Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

I: $\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = r\cos\varphi\left(1 - r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\right) + r\sin\varphi(r\cos\varphi - b)$

II: $\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = r\sin\varphi\left(1 - r^2\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}\right) - r\cos\varphi(r\cos\varphi - b)$

I' = I·cos φ: $\dot{r}\cos^2\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi = r\cos^2\varphi(1-r^2) + r\sin\varphi\cos\varphi(r\cos\varphi - b)$

II' = II·sin φ: $\dot{r}\sin^2\varphi + r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi = r\sin^2\varphi(1-r^2) - r\cos\varphi\sin\varphi(r\cos\varphi - b)$

I' + II': $\dot{r}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)(1-r^2)$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\dot{r} = r(1-r^2)}$

I'' = I·sin φ: $\dot{r}\cos\varphi\sin\varphi - r\dot{\varphi}\sin^2\varphi = r\cos\varphi\sin\varphi(1-r^2) + r\sin^2\varphi(r\cos\varphi - b)$

II'' = II·cos φ: $\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi + r\dot{\varphi}\cos^2\varphi = r\sin\varphi\cos\varphi(1-r^2) - r\cos^2\varphi(r\cos\varphi - b)$

II'' − I'': $r\dot{\varphi}\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} = -r\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}(r\cos\varphi - b)$

$\overset{r\neq 0}{\Leftrightarrow}$ $\boxed{\dot{\varphi} = b - r\cos\varphi}$

lineare Stabilitätsanalyse:

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{r} \\ \delta\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3r^2 & 0 \\ -\cos\varphi & +r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Fixpunkte: $r^* = 0$: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\mathrm{tr}\,\underline{A} = 1$, $\det \underline{A} = 0$

Achtung: Phase φ bei r=0 nicht definiert:

$\Rightarrow$ effektiv 1D: $\dot{r} = r(1-r^2) \Rightarrow \delta\dot{r} = (1-3r^2)|_{r^*}\,\delta r$

mit $r^*=0$: $(1-3r^2)|_{r^*} = 1 > 0 \Rightarrow$ instabil

$r^* = 1$: $\quad \dot{r} = 0$

$\dot{\varphi} = b - \cos\varphi \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \varphi = \arccos b \quad (|b|<1)$

$\cos\varphi^* = b \Rightarrow \cos^2\varphi^* = 1 - \sin^2\varphi^* = b^2$

$\Rightarrow \sin\varphi^* = \pm\sqrt{1-b^2}$

FP in (x,y)-Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= r^*\cos\varphi^* = b \\ y^* &= r^*\sin\varphi^* = \pm\sqrt{1-b^2} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{existiert für } |b|<1 \\ &\text{bei } b=1: \text{Entstehung eines Grenzzyklus} \\ &\quad y^* = 0 \end{aligned}$$

Periode: aus $\dot{\varphi}$ mit Trennung der Variablen:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{b-\cos\varphi}\, d\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2-1}} \quad \text{für } b>1$$

$$\lim_{|b|\to 1} T = \infty$$

Stabilität von

(i) $(x^*, y^*) = (b, +\sqrt{1-b^2})$: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -b & \sqrt{1-b^2} \end{pmatrix}$

$\operatorname{tr}\underline{\underline{A}} = -2 + \sqrt{1-b^2} < 0 \Rightarrow$ Sattel: $\lambda = \begin{cases} -2 \\ \sqrt{1-b^2} \end{cases}$

$(\det\underline{\underline{A}} = -2\sqrt{1-b^2} < 0)$

(ii) $(x^*, y^*) = (b, -\sqrt{1-b^2})$: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -b & -\sqrt{1-b^2} \end{pmatrix}$

$\operatorname{tr}\underline{\underline{A}} = -2 - \sqrt{1-b^2} < 0$

$\det\underline{\underline{A}} = +2\sqrt{1-b^2}$

$(\operatorname{tr}\underline{\underline{A}})^2 - 4\det\underline{\underline{A}} = 4 + 4\sqrt{1-b^2} + (1-b^2) - 8\sqrt{1-b^2} = 4 - 4\sqrt{1-b^2} + (1-b^2) > 0$

$\Rightarrow$ Stabiler Knoten

$$\lambda = \begin{cases} -2 \\ -\sqrt{1-b^2} \end{cases}$$