1. Übung zur Nichtlinearen Dynamik & Strukturbildung

Inhalt: 1) Love Affairs

2) Maxwell-Bloch-Gleichungen

1 Love Affairs (Strogatz 1988, Sprott 2004)

$R(t)$: Romeos $\underset{R>0}{\text{Liebe}}$ / $\underset{R<0}{\text{Abneigung}}$ für Julia

$J(t)$: Julias $\underset{J>0}{\text{———}}$ " $\underset{J<0}{\text{———}}$ Romeo

Dynamisches System:

$$\dot{R} = \alpha R + \beta J$$
$$\dot{J} = \gamma R + \delta J$$

1. Fall:

$$\left.\begin{aligned}\dot{R} &= aJ \\ \dot{J} &= -bR\end{aligned}\right\} \quad , a,b>0 \Rightarrow \begin{pmatrix}\dot{R}\\ \dot{J}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & a\\ -b & 0\end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix}R\\ J\end{pmatrix}$$

Q: (i) Eigenwerte (+Fixpunkt)
(ii) Typ des Fixpunkts
(iii) Phasenraumportraits

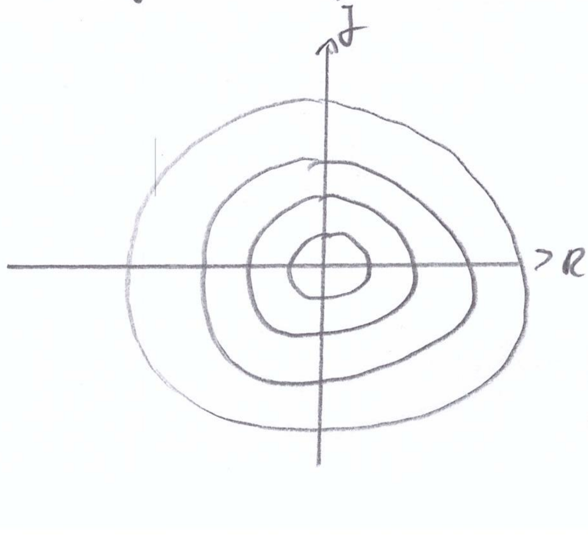
(i) Eigenwerte: $\det(\underline{A} - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix}-\lambda & a\\ -b & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 + ab \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda^2 = \pm\sqrt{-ab} = \pm i\sqrt{ab}$

Fixpunkt: $\begin{pmatrix}R^*\\ J^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

(ii) rein imaginäre Eigenwerte $\Rightarrow$ Zentrum

(iii)



Interpretation?

2. Fall: 2 vorsichtige Liebhaber

$$\dot{R} = aR + bJ \quad \text{mit } a<0 \text{ (Grad der Vorsicht)}$$
$$\dot{J} = bR + aJ \quad b>0 \text{ (Grad der Erwiderung)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}$$

(i) FP: $\begin{pmatrix} R^* \\ J^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 - b^2$

$$= \lambda^2 - 2a\lambda - b^2 + a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2a}{2}\right)^2 + b^2 \cancel{-a^2}}$$

$$= a \pm b$$

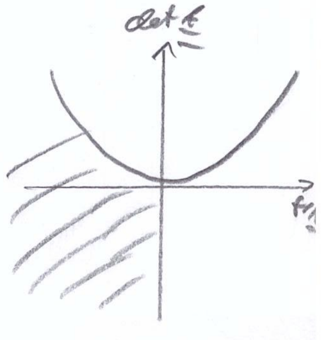
Frage: Eigenvektoren $\underline{v}_{1,2}$ zu $\lambda_{1,2}$? $\quad (\underline{\underline{A}}\underline{v}_{1,2} = \lambda_{1,2} \underline{v}_{1,2})$

1) $\begin{pmatrix} a-(a+b) & b \\ b & a-(a+b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} -b\, v_1^{(1)} + b\, v_1^{(2)} &= 0 \\ b\, v_1^{(1)} - b\, v_1^{(2)} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_1^{(1)} = v_1^{(2)}$ etwa $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} a-(a-b) & b \\ b & a-(a-b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^{(1)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

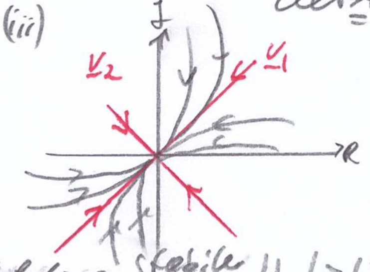
$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} b\, v_2^{(1)} + b v_2^{(2)} &= 0 \\ b\, v_2^{(1)} + b\, v_2^{(2)} &= 0 \end{aligned}\right\} v_2^{(1)} = -v_2^{(2)}$ etwa $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



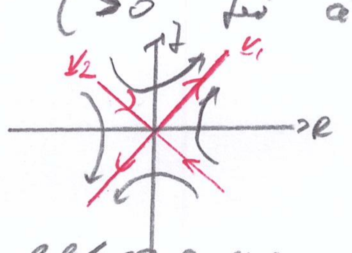
Außerdem: $\operatorname{tr}\underline{\underline{A}} = 2a < 0$ für $a<0$

$\det \underline{\underline{A}} = a^2 - b^2 \begin{cases} <0 & \text{für } a^2 < b^2 \\ >0 & \text{für } a^2 > b^2 \end{cases}$

(ii) + (iii)



$\det A > 0$, stabiler Knoten $|\lambda_2| > |\lambda_1|$)



"evergrowing love/hate"

$\lambda_2 < 0,\ \lambda_1 > 0$

$\det A < 0$, Sattelpunkt

2.) Maxwell-Bloch-Gleichungen

Die Maxwell-Bloch-Gleichungen sind (dimensionslose) Ratengleichungen und beschreiben die Dynamik eines Lasers

$$\dot{E} = \kappa(P - E),$$
$$\dot{P} = \gamma_1(E\,D - P),$$
$$\dot{D} = \gamma_2(\lambda + 1 - D - E\,P).$$

class C laser

Hierbei ist E das elektrische Feld der Lasermode, P die mittlere Polarisation im Medium und D die Besetzungsinversion. Der Parameter $\kappa > 0$ ist die Photon-Verlustrate und $\gamma_1 > 0$ und $\gamma_2 > 0$ sind die Zerfallsraten der Polarisation bzw. der Inversion. Der Parameter λ stellt die Pumprate abzüglich des Schwellwerts dar und kann positiv, null oder negativ sein.
Diese Gleichungen sind äquivalent zu den Lorenz-Gleichungen und zeigen daher kompliziertes dynamisches Verhalten und insbesondere auch Chaos.

1. Finden Sie die Fixpunkte der Gleichungen und charakterisieren Sie diese (stabil/instabil, Focus/Sattel/Knoten).
2. Für viele Laser gibt es eine Zeitskalentrennung $\gamma_1, \gamma_2 \gg \kappa$. Damit lassen sich dann P und D adiabatisch wie folgt eliminieren. Nehmen Sie $\dot{P} \approx 0$ und $\dot{D} \approx 0$ an. Leiten Sie damit eine einzelne Differentialgleichung erster Ordnung für E her.
3. Finden Sie für die vereinfachte eindimensionale Gleichung die Fixpunkte E^* und deren Stabilität. Zeichnen Sie ein Bifurkationsdiagramm mit E^* in Abhängigkeit von λ.

1) Fixpunkte: $\dot{E} = 0 = \dot{P} = \dot{D}$

$$\Rightarrow 0 = \kappa(P - E) \Rightarrow P = E$$
$$0 = \gamma_1(ED - P) \Rightarrow P = ED$$
$$0 = \gamma_2(\lambda + 1 - D - EP) \Rightarrow D = \lambda + 1 - EP$$

$$\underline{x}^* = \begin{pmatrix} E^* \\ P^* \\ D^* \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Linear aus! physikalisch?

Linearisierung: Jacobi-Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -\kappa & \kappa & 0 \\ \gamma_1 D & -\gamma_1 & \gamma_1 E \\ -\gamma_2 P & -\gamma_2 E & -\gamma_2 \end{pmatrix}$$

Betrachte 1. FP : $E^* = P^* = 0$, $D^* = \lambda + 1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\Big|_{E^*,P^*,D^*} = \begin{pmatrix} -\kappa & \kappa & 0 \\ \gamma_1(\lambda+1) & -\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte bestimmen:

Entwicklung nach 3. Zeile / 3. Spalte

$$\det(\underline{A} - \Lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\kappa-\Lambda & \kappa & 0 \\ \gamma_1(\lambda+1) & -\gamma_1-\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_2-\Lambda \end{vmatrix} = (-\gamma_2-\Lambda) \begin{vmatrix} -\kappa-\Lambda & \kappa \\ \gamma_1(\lambda+1) & -\gamma_1-\Lambda \end{vmatrix}$$

anderes Symbol, weil λ Parameter

$$= \underbrace{(-\gamma_2-\Lambda)}_{\Rightarrow \Lambda_1 = -\gamma_2 < 0} \underbrace{\left[(-\kappa-\Lambda)(-\gamma_1-\Lambda) - \kappa\gamma_1(\lambda+1)\right]}_{\stackrel{!}{=} 0}$$

$$[\ldots] = \Lambda^2 + \Lambda(\kappa+\gamma_1) + \cancel{\gamma_1\kappa} - \kappa\gamma_1(\lambda + \cancel{1}) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \Lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}\left(\kappa+\gamma_1 \pm \sqrt{(\kappa+\gamma_1)^2 + 4\kappa\gamma_1\lambda}\right)$$

(a) $\lambda > 0 \Rightarrow \Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$, $\Lambda_3 > 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

(b) $0 > \lambda > -\frac{(\gamma_1+\kappa)^2}{4\kappa\gamma_1} \Rightarrow \Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$, $\Lambda_3 < 0 \Rightarrow$ stabiler Knoten

(c) $-\frac{(\gamma_1-\kappa)^2}{4\kappa\gamma_1} > \lambda \Rightarrow \Lambda_1 < 0$, $\mathrm{Re}\,\Lambda_2 < 0$, $\mathrm{Re}\,\Lambda_3 < 0$, $\Rightarrow$ stabiler Fokus

$\mathrm{Im}\,\Lambda_2 = -\mathrm{Im}\,\Lambda_3$

2. + 3. FP schwieriger zu analysieren : $\begin{pmatrix} E^* \\ P^* \\ D^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda} \\ \pm\sqrt{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Betrachte $\gamma_1, \gamma_2 \gg k \Rightarrow \dot{P} \approx 0, \dot{D} \approx 0$ adiabatische Eliminierung!

$$\left.\begin{aligned} P &= ED \\ D &= \lambda + 1 - EP \end{aligned}\right\} \quad P = E(\lambda + 1 - EP)$$

$$\Rightarrow P(1+E^2) = E(\lambda+1) \Rightarrow P = E\frac{\lambda+1}{1+E^2}$$

$$\Rightarrow \dot{E} = k(P-E) = kE\left(\frac{\lambda+1}{1+E^2} - \underset{\frac{1+E^2}{1+E^2}}{1}\right) = kE\,\frac{\lambda - E^2}{1+E^2}$$ (class A Laser)

Fixpunkte: $E^* \in \{0, +\sqrt{\lambda}, -\sqrt{\lambda}\}$

Jacobi-„Matrix": $$\frac{\partial \dot{E}}{\partial E} = k\frac{\lambda - E^2}{1+E^2} + kE\left(\frac{-2E}{1+E^2} - \frac{2E(\lambda - E^2)}{(1+E^2)^2}\right)$$

$$= \frac{k(\lambda - (\lambda+3)E^2 - E^4)}{(1+E^2)^2}$$

$$\Rightarrow \Lambda_1(E^* = 0) = k\lambda$$

$$\Lambda_{2,3}(E^* = \pm\sqrt{\lambda}) = \frac{k(\lambda - (\lambda+3)\lambda - \lambda^2)}{(1+\lambda)^2} = \frac{k(\lambda - 2\lambda^2 - 3\lambda)}{(1+\lambda)^2}$$

neg. für $\lambda > 0$

$$= \frac{k(-2\lambda)\cancel{(1+\lambda)}}{(1+\lambda)\cancel{(1+\lambda)}} = -\frac{k2\lambda}{1+\lambda}$$