Universität des Saarlandes 29. Mai 2024
LV-Nr.: 149535 (SS24)
Dozent: Dr. habil. Philipp Hövel

Übungsblatt 2 – Nichtlineare Dynamik und Strukturbildung

Abgabe: Mittwoch, 29.05.2024, 10:00 (vor der Übung oder via Moodle)

Name: ....
Matrikelnummer: ....

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte den Code ebenfalls einreichen.
Einzelabgabe als Ausdruck oder digital via Moodle.

Aufgabe 3 (10 Punkte): *Poincaré-Abbildung*
Betrachten Sie das folgende dynamische System für $z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\varphi(t)} \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (\lambda - r^2)r, \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{aligned}$$

mit $\lambda > 0$ und $\mathbf{S}$ die positive x-Achse. Dadurch ergibt sich – ausgehend von einem Anfangswert $z_0 = r_0 = x_0 \in \mathbf{S}$ – eine Poincaré-Abbildung $\mathbf{P}$: $r_{k+1} = \mathbf{P}(r_k)$.

1. Bestimmen Sie die Periode des stabilen Grenzzyklus durch Lösen der Differenzialgleichung von φ.

2. Zeigen Sie durch Lösen der Differenzialgleichung von r, dass die durch $\mathbf{S}$ gegebene Poincaré-Abbildung $\mathbf{P}$ gegeben ist durch:

$$r_{k+1} = \sqrt{\frac{\lambda}{1 + e^{-4\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{r_k^2} - 1\right)}}.$$

   Hinweis: Eine Trennung der Variablen und anschließende Partialbruchzerlung helfen weiter.

3. Plotten Sie die Poincaré-Abbildung $\mathbf{P}$, d.h. $(r_k, \mathbf{P}(r_k))$, für $\lambda = 0.1$ und 1 bei einem Startwert $r_0 = 0.001$.

4. Zeigen Sie anhand der Graphik, dass es nur einen periodischen Orbit gibt.

5. Bestimmen Sie den Fixpunkt der Poincaré-Abbildung $\mathbf{P}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte): *Reduziertes SNIPER-Modell*
Die dynamischen Gleichungen eines einfachen Modells einer SNIPER-Bifurkation lauten in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1-r^2)\\ \dot{\varphi} &= b - r\cos\varphi.\end{aligned}$$

Im folgenden soll nur die Dynamik von φ auf dem Kreis mit $r = 1$ untersucht werden.

1. Untersuchen Sie die Fixpunkte des reduzierten Systems in Abhängigkeit vom Parameter b (Existenz, Position, Stabilität)

2. Finden Sie die Lösungen $\varphi(t)$ durch Trennung der Variablen für $b < 1$ und $b > 1$.
   Hinweis: Benutzen Sie hierfür folgende Integrale

$$\int \frac{d\varphi}{b-\cos\varphi} = \frac{2}{\sqrt{b^2-1}} \arctan\left[\frac{(b-1)\tan\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{b^2-1}}\right] \qquad \text{für } b > 1,$$

$$\int \frac{d\varphi}{b-\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \log\left[\frac{(1+b)\tan\frac{\varphi}{2} - \sqrt{1-b^2}}{(1+b)\tan\frac{\varphi}{2} + \sqrt{1-b^2}}\right] \qquad \text{für } b < 1.$$

3. Plotten Sie für die beiden Fälle $b > 1$ und $b < 1$ die Zeitserien für $x(t) = \cos\varphi(t)$ mit geeigneten Anfangsbedingungen.