

Frage: Wann gibt es eine diffusive Instabilität?

Annahme: ohne Diffusion ist das System stabil

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f_2(u, v) + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Linearisierung:

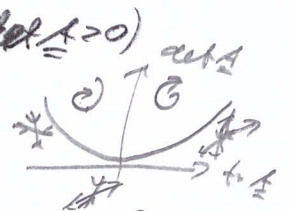
$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} - D_1 k^2 & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} - D_2 k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - D_1 k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - D_2 k^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{tr } A = \frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} - (D_1 + D_2) k^2 = a_{11} + a_{22} - (D_1 + D_2) k^2$$

$$\det A = (a_{11} - D_1 k^2)(a_{22} - D_2 k^2) - a_{12} a_{21}$$

Instabilität für (i) $\text{tr } A > 0$ (Fokus oder Knoten für $\det A > 0$)

(ii) $\det A < 0$ (Sattel)



(ii) $a_{11} + a_{22} - (D_1 + D_2) k^2 < 0$, weil $(a_{11} + a_{22}) < 0$, damit System für $D_1 = D_2 = 0$ stabil ist!

$$\Rightarrow \text{(ii) } \det A = \underbrace{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}_{\det A_0} - (D_1 a_{22} + D_2 a_{11}) k^2 + D_1 D_2 k^4$$

$$\det A_0 = \det A(D_i = 0) > 0$$

Beweis analog wie (i)

Instabilität bei $\det A = 0 \Rightarrow$ reelle Nullstellen von Polynom in $k^2 = q$

$$\Rightarrow P(q) = (D_1 a_{22} + D_2 a_{11}) q + \det A_0 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow q_{1/2} = \frac{1}{2D_1 D_2} \left((D_1 a_{22} + D_2 a_{11}) \pm \sqrt{(D_1 a_{22} + D_2 a_{11})^2 - 4 D_1 D_2 \det A_0} \right)$$

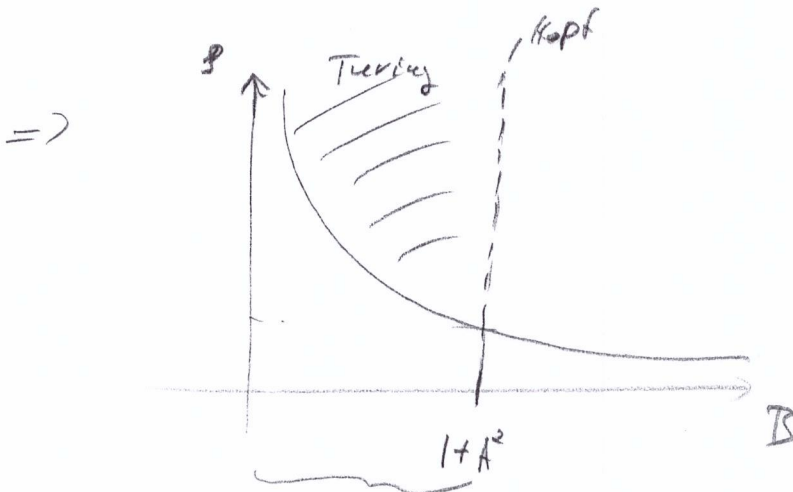
$$\Rightarrow \text{(a) } D_1 a_{22} + D_2 a_{11} > 0$$

$$\text{(b) } (D_1 a_{22} + D_2 a_{11})^2 > 4 D_1 D_2 \det A_0$$

Zurück zu Brüsseler-Kochell: $a_{11} = B - 1 > 0$, $a_{22} = -A^2 < 0$

82

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{D_1} > \text{Stabilität} &= \frac{1}{(B-1)^2} \left(2A^2 + (B-1)A^2 + 2 \sqrt{\frac{A^2(A^2 + (B-1)A^2)}{+BA^2}} \right) \\ &= \frac{1}{(B-1)^2} \left(A^2(B+1) + 2A^2\sqrt{B} \right) \\ &= \frac{A^2}{(B-1)^2} \left(B+1 + 2\sqrt{B} \right) \\ &= \frac{A^2 (\sqrt{B}+1)^2}{(B-1)^2} = \frac{A^2 (\sqrt{B}+1)^2}{[(\sqrt{B}-1)(\sqrt{B}+1)]^2} \\ &= \frac{A^2}{\sqrt{B}-1} \end{aligned}$$



$B < 1 + A^2 \Rightarrow \text{Stabilität}$

Frage: What about the following SJS fms?

$$(1) \begin{aligned} \dot{u} &= R_1(u, v) u & R_1: \text{Wachstumsrate} \\ \dot{v} &= R_2(u, v) v & \end{aligned}$$

Gibt es für negative Wachstumsraten Kreisbildung (eindeutige Differenzial)

$$(2) \begin{aligned} \dot{u} &= R(u) u - p(u) v & R: \text{Wachstum Beute } u \\ \dot{v} &= e p(u) v - \mu(v) v & \mu: \text{Mortalität Räuber } v \\ & & p: \text{per capita Fressrate} \\ & & e: \text{Konversionskoeffizient} \end{aligned}$$

⇒ Räuber-Beute-Modell
(u) (v)

Gibt es kein Kreisbildung (eindeutige Differenzial)?

Teste $\text{tr} A$, $\det A$...

$$(1) A_0 = \begin{pmatrix} u \frac{\partial R_1}{\partial u} + R_1 & \frac{\partial R_1}{\partial v} \\ \frac{\partial R_2}{\partial u} & v \frac{\partial R_2}{\partial v} + R_2 \end{pmatrix} \Rightarrow f_{1, A_0} = u^x \frac{\partial R_1}{\partial u} + R_1 + v^y \frac{\partial R_2}{\partial v} + R_2$$

$$= R_1 + R_2 < 0$$

↑
 $u^x = 0 = v^y$

$$\det A_0 = \underbrace{R_1 R_2}_{> 0} - \underbrace{\frac{\partial R_1}{\partial v} \frac{\partial R_2}{\partial u}}_{> 0} \geq 0$$

$$(2) A_0 = \begin{pmatrix} R(0) & -p(0) \\ 0 & -\mu(0) + e p(0) \end{pmatrix} \Rightarrow ? \text{ für triviale FP } \begin{matrix} u^* = 0 \\ v^* = 0 \end{matrix}$$

? für nicht-triviale FP $\begin{matrix} u^* > 0 \\ v^* > 0 \end{matrix}$

Bsp: Reaktionsdiffusionsmodell in der Natur

CS-Konto Netem 370, 765 (1995)

$$\frac{\partial A}{\partial t} = C_1 A + C_2 I + C_3 - D_A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - g_A A$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = C_4 A + C_5 - D_I \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - g_I I$$

Recherche für:

- a) Taylor-Couette-Instabilität
- b) Rayleigh-Plateau-Instabilität
- c) Saffman-Taylor-Instabilität
- d) Kelvin-Helmholtz-Instabilität

a) Taylor-Couette-Instabilität



Navier-Stokes-Gleichung:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{v} + \left(\rho + \frac{\mu}{\beta}\right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f}$$

- ρ : Dichte
- \mathbf{v} : Geschwindigkeit
- P : Druck
- μ : dynamische Viskosität, β : Volumenkohäsivität
- \mathbf{f} : Volumenkraftdichte

Für inkompressible Flüssigkeiten: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

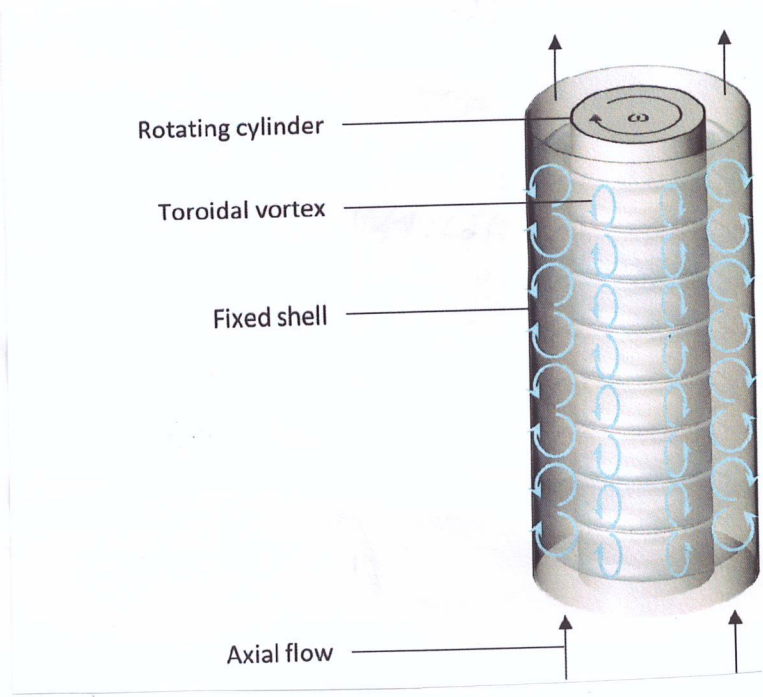
$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

in Zylinderkoordinaten: r, θ, z : $\omega = A r + \frac{B}{r}$



Bei zu großem ω :

Zentrifugale Instabilität
 löst Torus-förmige Vortices aus
 \Rightarrow Taylor-Couette Strömung



Instabilitäten höherer Ordnung

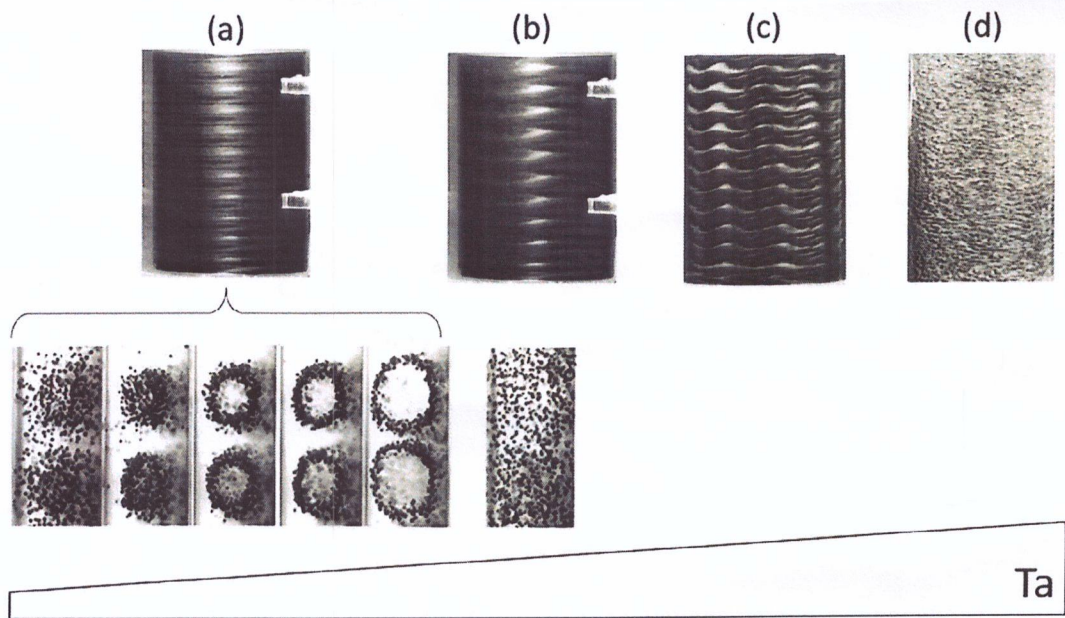
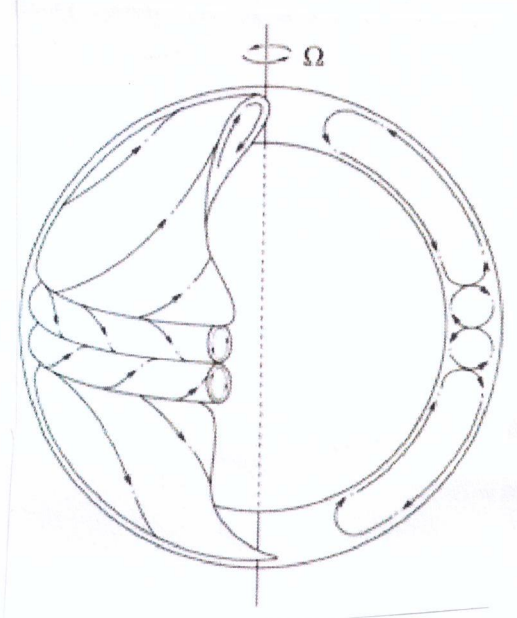
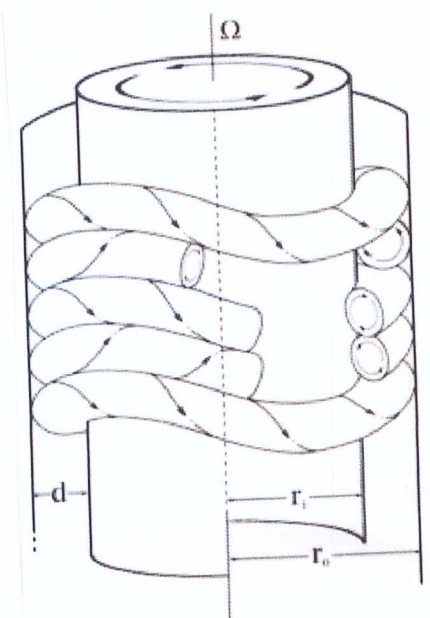


FIGURE 3 Transition through the major flow types in a Taylor-Couette reactor and equilibrium locations of neutrally buoyant particles with growing Taylor number. (a) Taylor-vortex flow, (b) Wavy vortex flow, (c) modulated wavy vortex flow, (d) turbulent flow. Images for (a) and (b) captured by Majji and Morris (edited for increased simplicity).³¹ Reproduced with permission from AIP Publishing. Copyright 2018. Pictures for (c) and (d) taken by Andereck.¹⁴ Reproduced with permission from Cambridge University Press. Copyright 2006



Rayleigh-Plateau-Instabilität (b)

die von der Oberflächenspannung getriebene, spontane Umwandlung eines flüssigen Zylinders in einzelne Tropfen. (X)

Bsp: Drosselt man den Strahl aus einem Wasserhahn stark, so kommt er am Boden des Waschbeckens in Form einzelner Tropfen an. Der zunächst zylindrische Strahl hatte genügend Zeit, beim Fall in einzelne Tropfen zu zerfallen. Er tut dies, weil die Kugelform (Tropfen) das günstigere Verhältnis von Volumen zu Oberfläche aufweist als der Zylinder (Strahl) → Plateaus Analyse von Savarts Experiment führt zu $\lambda \approx 8,8a$ a : Radius

Bsp: Tautropfen auf Spinnennetz

Bsp: Wasserfarben auf Keramik (hydrophile Streifen vor hydrophobem Hintergrund)

x) ein Wasserstrahl (flüssiger Zylinder) zerfällt spontan in eine Perlschnur einzelner Tropfen, weil sich durch die Gesamtoberfläche des Wassers verringert.

- a: Radius des Wasserzylinders
- b: momentaner Radius
- $\langle b \rangle$: Mittelwert von b

$\xi_k \ll a$: Schwingungsamplitude

Zylinder instabil gegenüber jeder periodischen Deformation mit $k < k_c = \frac{1}{a}$ bzw $\lambda > 2\pi a$.

Wachstumsrate einer Mode mit $k < k_c$:

Viskosität vernachlässigbar \Rightarrow einfache Berechnung der ~~Flu~~ Geschwindigkeit $\vec{u}(x, r)$ verbunden mit der Rate der Änderung von S_k

Laplace-Gleichung $\Delta \phi = 0 \Rightarrow$ Lösung $\phi \sim \cos(kx) f(r) \frac{\delta S_k}{\delta t}$

$T = E_{kin} \sim \left(\frac{\delta S_k}{\delta t} \right)^2$ mittlere kinet. Energie pro Längeneinheit

↳ Proportionalitätskonstante

\Rightarrow Bewegungsgleichung $\frac{\delta^2 S_k}{\delta t^2} \leftrightarrow S_k$

$S_k = \frac{\text{momentane Wachstumsrate}}{\text{Amplitude}} = \frac{\dot{S}_k}{S_k}$

\Rightarrow Rayleigh $S_k = 0$ für $k = k_c$

S_k maximal für $k = 0,697 k_c$ bzw $\lambda = 9,02 a$

Savarts Experiment: $\lambda = 8,8 a$

2% Fehler sind Messfehler

c) Saffman-Taylor-Instabilität (viscous fingering)

Grenzschicht zwischen 2 Flüssigkeiten

Siehe auch Rayleigh-Taylor-Instabilität

d) Kelvin-Helmholtz-Instabilität

Ursache: kleine Störung durch Scherströmung zweier Fluide mit unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten

↳ Wellen, Wirbel, Wolken



e) Rayleigh-Bénard-Konvektion

