

2.5 Bifurkationen von räumlichen Mustern

(S. v. Kapitel 4)

Idee: dynamische Variable hängt von x und t ab



etwa: $\frac{\partial}{\partial t} g(x,t) = F(g, \mu) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,t)$ (Reaktives-diffusionsgleichung)

\uparrow Bif. Parameter $\quad \uparrow$ Diffusionskonstante

Lineare Stabilitätsanalyse $\hat{g} \propto e^{\lambda t} e^{ikx}$
 Wellenvektor k
 Wellenvektor

$A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial g_j} \Big|_{g^*} - D_{ij} k^2$

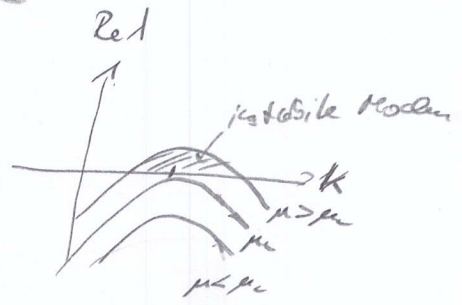
\Rightarrow Dispersionen $\lambda(k)$ (auch $\lambda(k)$ in 2D/3D Raum)

$\Rightarrow \text{Re } \lambda(k) \begin{cases} < 0 \text{ stabil} \\ > 0 \text{ instabil} \\ = 0 \text{ Bifurkation v. räumlich-periodischen Lösungen mit Wellenvektor } k \end{cases}$

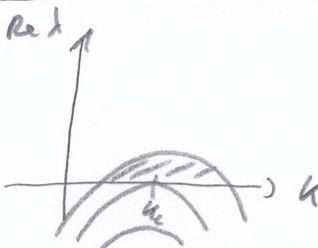
2.5.1 Turing-Instabilität

2.5.2 stehende/laufende Wellen

2.5.3 Hopf-Bifurkationen



2.5.1 Turing-Instabilität



$\lambda(k) = 0$ (kein Imaginärteil!)

bei $|k| = k_c \neq 0$

Beobachtung: Stationäre, räumlich periodische Struktur mit Wellenzahl k_c bifurkiert

$\lambda(k) = \epsilon - b (k^2 - k_c^2)^2$ und $\epsilon = \frac{\mu - \mu_c}{\mu}$

Bsp.: langsam diffundierender Aktivator + schneller Inhibitor

2.5.2 stekende / laagfrequente Wellen

$$\lambda(k) = \pm i\omega \quad \text{bei } |k| = k_c \neq 0$$

Beobachtung: oszillierend, räumlich periodische Strukturen werden zu Wellen $\propto e^{i(kx \pm \omega t)}$

$$\lambda(k) = \epsilon - b (k^2 - k_c^2)^2 \pm i\omega$$

Re λ vs. k wie oben bei 2.5.1



2.5.3 Kopf-Bifurkationen

$$\lambda(k) = \pm i\omega \quad \text{bei } |k| = k_c = 0$$

$$\lambda(k) = \epsilon - b (k^2)^2 \pm i\omega$$

Beobachtung: räumlich homogen Green'sche Lösung



weiter dazu im Kapitel 4

3. Deterministisches Chaos

Deterministischer, aber ungeordnete Bewegung im Langzeitverhalten von Systemen mit $n \geq 3$ (autonom):

Seltene (chaotische) Attraktion

3.1 Klassifikationskriterien

3.2 Definitionen

3.3 Seltene Attraktionen

3.1 Klassifikationskriterien

Kriterien	quasi-periodisches Verhalten	deterministisches Chaos	stochastisches System (Rauschen)
Freiheitsgrade	wenige dynamische Freiheitsgrade, niedrig-dimensionale Phasenraum		viele mikroskopische Freiheitsgrade $f \approx 10^{28}$
Attraktiv	Torus T^d mit $d=2,3,\dots$	Seltene Attraktion mit fraktaler Dimension	Skalengesetz der Ensemble
Autokorrelationsfunktion $\langle x(t) \cdot x(t+\tau) \rangle$ $= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t+\tau) dt$	periodisch in τ	$\langle x(t) \cdot x(t+\tau) \rangle \rightarrow 0$ $\tau \rightarrow \infty$	$\langle x(t) \cdot x(t+\tau) \rangle = 0$ für $\tau \geq \tau_c$ Korrelationszeit
Frequenzspektrum (spektrale Leistungsdichte, Power Spectrum) $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t) \cdot x(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau$	diskrete Frequenzen $\omega_1, \omega_2, \dots$	breites Frequenzband	
Sensitives		i) Sensibilität gegenüber kleinen Störungen in den Anfangsbedingungen ii) typische universelle Bifurkationsdiagramme	

3.2 Definitum

Def.: Eine Bewegung heißt **stabil**, wenn sie empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt.

⇒ qualitative Aussagen

Ziel: quantitative Formulierung der Stabilität gegenüber kleinen Veränderungen der Anfangsbedingungen

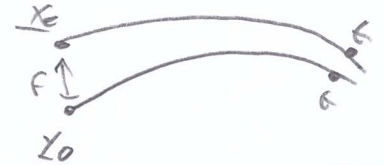
Bahnstabilität (**orbital stability**):



orbital stabil
alle benachbarten Bahnen bleiben in einem ϵ -Röhren um $\phi(t, x_0)$



asymptotisch stabil
Abstand $\epsilon \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$



Ljapunov asymptotisch stabil

$$|\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

dasselbe!

Lin. Näherung in der Nähe des Lösungspunktes $\phi(t, x_0)$:

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x(t), t) \delta x_k$$

$A_{ik}(t)$ mit Eigenwerten $\lambda_j(t)$ & Eigenvektoren $\underline{v}^{(j)}(t)$

formale Lösung: $\delta x(t) = e^{\int_0^t A(t') dt'} \delta x(0)$

Zeitentwicklung einer infinitesimalen Kugel um x_0 :

→ kleine Ellipsoid mit Hauptachsen $p_j(t) = p_j(0) e^{\lambda_j t}$

Def.: Stabilität ist bestimmt durch die **Ljapunov-Exponenten**

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_j(t)}{p_j(0)}$$

Bem.: Fürwende (größter) Ljapunov-Exponent:

$$\lambda := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\phi(t, x) - \phi(t, y)|$$

$$\Rightarrow |\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \approx e^{\lambda t}$$

$\lambda < 0$ kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen exponentiell gedämpft

$\lambda > 0$ exponentielles Anwachsen an den benachbarten Bahnen