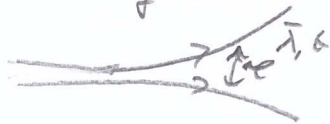


3.3 Selbstneue Attraktoren

chaotischer Attraktoren \mathbb{R}^3 : $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 < 0$

instabile Bewegung
auf Attraktoren

Stabilität von allen
Attraktoren



Merkmale: • Unförmigkeit des \mathbb{R}^n

($\dot{x} = F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$) • Trajektorien liegen **dicht** beieinander: Zwischen 2 Trajektorien liegt (peristimmensweise) ein 3.

- Kleine Abweichungen verhalten sich exponentiell.
- auf lange Sicht / für lange Zeiten kommen sich 2 Trajektorien beliebig nahe.
- Dimension nicht ganzzahlig: **fraktale Dimension**

Quantitative Formulierung der fraktalen Dimension:

Daf: Sei $N(\epsilon)$ die Mindestzahl von n -dimensionalen Würfeln mit Seitenlänge ϵ , um eine (Punkt)Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ zu überdecken.

$$\text{Dann heißt } d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}}$$

die **fraktale (Hausdorff-) Dimension**. (box-counting dimension)

Bem.: aus $d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}}$ folgt: $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^d}$

Bsp.: - Punkt: $N(\epsilon) = \text{const}$



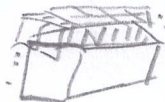
- Linie: $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon}$



- Fläche: $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^2}$



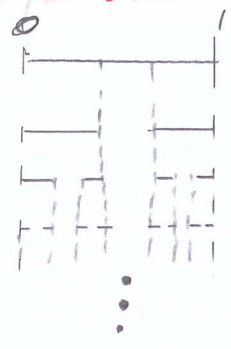
- Volumen: $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^3}$



- Chaotischer Attraktor in \mathbb{R}^3 :

Beobachtung: Volumen $V \rightarrow 0 \Rightarrow d < 3$, aber käufig $d > 2$
 ↳ Lorenz-Modell
 Rössler-Modell

- Cantor-Menge (selbstähnliche Struktur, Cantor set)






ϵ	$N(\epsilon)$
1	1
$\frac{1}{3}$	2
$\frac{1}{9}$	4
$\frac{1}{27}$	8
\vdots	\vdots
$\frac{1}{3^k}$	2^k

Diskussion (fractal):

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63$$

Zwischen Punkt und Linie

- Koch-Kurve (Koch snowflake)

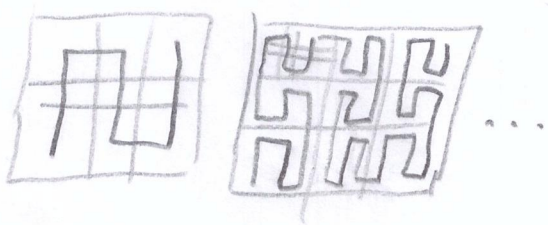
			...	
ϵ	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3^k}$
N	1	4	16	4^k

$$d = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26$$

Zwischen Linie und Fläche

- aus der Natur: Meeresküste

- Achtung: Peano-Kurve (raumfüllende Kurve)



F.A.S.S.: space-filling, self-avoiding, simple, self-similar

Bsp.: - Lorenz-Modelle:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a y - a x \\ \dot{y} &= b x - x z - y \\ \dot{z} &= x y - c z\end{aligned}$$

typische Parameter für Chaos:

$$a=10, b=28, c=\frac{8}{3}$$

Merkmale: "double scroll"

- Rössler - Attraktor

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + a y \\ \dot{z} &= b + x z - c z\end{aligned}$$

typische Parameter für Chaos:

$$a=0.2, b=0.2, c=5.7$$

Fixed points:

$$\begin{aligned}x_{1,2}^* &= \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} \\ y_{1,2}^* = -z_{1,2}^* &= \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\end{aligned}$$

$$\dot{x}=0 \Rightarrow y^* = -z^*$$

$$\dot{y}=0 \Rightarrow x^* = a y^* = -a z^*$$

$$\dot{z}=0 \Rightarrow 0 = b + a z^{*2} - c z^* \Rightarrow z^{*2} - \frac{c}{a} z^* + \frac{b}{a} = 0$$

$$\Rightarrow z^* = \frac{1}{2} \frac{c}{a} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4a^2} + \frac{b}{a}} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$$

$$\Rightarrow y^* = -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}$$

Jacobi-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z^* & 0 & x^* - c \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Polynom 3. Grad für Eigenwerte:}$$

$$-\lambda^3 + \lambda^2(a+x-c) - \lambda(ac - ax - 1 - z) + x - c + az = 0$$

Eigenwerte: $\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 0.097103 + i 0.995786 \\ \lambda_2 &= 0.097103 - i 0.995786 \\ \lambda_3 &= -5.68719 \end{aligned} \right\} \text{IP: nahe Ursprung}$

\Rightarrow Inkomplex?

2. IP: $\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -0.000096 + i 1.62859 \\ \lambda_2 &= -0.000096 - i 1.62859 \end{aligned} \right\}$