3.4 Chaos-Kontrolle

Kriterien für Chaos:

- sensitive Abhängigkeit gegenüber Anfangsbedingungen
- lokale Instabilität (positive Ljapunov-Exponenten) bei gleichzeitiger globaler Begrenztheit (seltsamer Attraktor)
- Nichtlinearitäten (lineare Systeme mit lokaler Instabilität sind nicht begrenzt)
- minimale Dimension = 3 (cf. Überschneidungen von Trajektorien in 2D-System verboten)
- wiederkehrende Trajektorien

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists T_\varepsilon > 0 : \forall t \geq 0 \; \exists T(t,\varepsilon):$$

$$0 < T(t,\varepsilon) < T_\varepsilon \;\wedge\; |\underline{x}(t+T(t,\varepsilon)) - \underline{x}(t)| < \varepsilon .$$

(lokal instabile Trajektorien kommen sich auf lange Zeiten beliebig nah.)

$\Rightarrow$ Ansatzpunkt für Kontrollmethoden an chaotischen Systemen:

(i) kleine Änderung (Kontrolleingriff) $\Rightarrow$ große Wirkung (Veränderung der Stabilität)

(ii) Wenn die Trajektorie jedem Punkt des Attraktors beliebig nah kommt, braucht man nur Geduld, um automatisch/von selbst in die Nähe des Zielzustands zu landen und diesen dann mit kleinen Kontrolleingriffen zu erreichen.

3.4.1 OGY-Kontrolle

3.4.2 Zeitverzögerte Rückkopplung

3.4.1 OGY-Kontrolle

OGY steht für Edward **O**tt, Celso **G**rebogi, James **Y**orke } damals (1990) University of Maryland

→ OGY: Controlling Chaos, Phys. Rev. Lett. **64**, 1196 (1990)

Was soll kontrolliert/stabilisiert werden?

↳ Chaotischer Attraktor enthält ∞ viele periodische Orbits

↳ Ziel: Stabilisierung eines instabilen periodischen Orbits

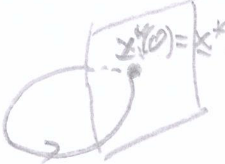
Idee: (i) Überführung von $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, \underline{u})$ mit Kontrollsignal $\underline{u}$ in eine diskrete Abbildung mittels Poincaré-Schnitten.

(ii) Kontrolle wirkt nur dann, wenn die Trajektorie in der Nähe des Zielzustands ist.

Poincaré-Schnitt: Definiere Fläche $S = \{\underline{x} : S(\underline{x}) = 0\}$ mit $\underline{x}^*(0) \in S$ (periodische Orbit)

und $S(\underline{x})$ so definiert, dass S senkrecht zu $\underline{x}^*(t)$ ist.

Bsp: Periode 1:



Periode 2

Poincaré-Abbildung: $\underline{x} \to \underline{P}(\underline{x}, \underline{u})$ mit $\underline{P}(\underline{x}, \underline{u})$ als 1. Wiederkehrpunkt auf Fläche S (Durchstoßpunkt)

⇒ Folge von Punkten $\underline{x}_{n+1} = \underline{P}(\underline{x}_n, \underline{u})$ mit $\underline{x}_k = \underline{x}(t_k)$ mit t_k Zeit des k-ten Durchstoßpunktes von S und $\underline{u}_k = \underline{u}(t)$ konstant für $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

Damit kann man die Dgl $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, \underline{u})$ durch eine diskrete Abbildung ersetzen: $\underline{\tilde{x}}_{k+1} = \underline{P}(\underline{\tilde{x}}_k, \underline{u}_k)$ mit $\underline{\tilde{x}}_k = \underline{x}_k - \underline{x}^*$

(Abweichung vom Zieldurchstoßpunkt

OGY-Kontrolle mittels: $\underline{u}_k = \begin{cases} C\,\tilde{\underline{x}}_k & \text{, wenn } |\tilde{\underline{x}}_k| < \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Ein Kontrollsignal wird gewählt, wenn Trajektorie in der Nähe von $\underline{x}^*$ ist.

Nachteile:
- evtl. Wartezeiten
- Kenntnis von $\underline{x}^*$ nötig
- häufig keine vollständige Kenntnis des Systems möglich (Poincaré-Schnitt ggf. unmöglich)

3.4.2. Zeitverzögerte Rückkopplung

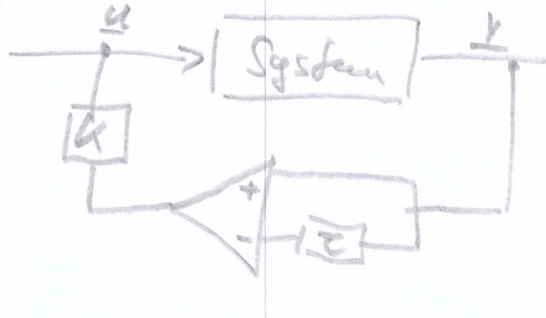
Referenz: Kestutis Pyragas: Continuous control of chaos by self-controlling feedback, Phys. Lett A **170**, 421 (1992)

Idee: Verwende statt Zielzustand $\underline{x}^*$ eine zeitverzögerte Version des Outputs/Ausgangs: $\underline{y}(t)$: $\underline{y}(t-\tau)$.

$\Rightarrow$ Pyragas-Kontrolle (time-delayed feedback): $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}) + \underline{\underline{K}}\,\overbrace{\left[\underline{y}(t) - \underline{y}(t-\tau)\right]}^{\underline{u}(t)}$

$= \underline{g}(\underline{x}(t))$, etwa $\underline{y}(t) = \underline{x}(t)$

Schema:



closed loop

(Selbst-) Regelung

(vgl. open loop = Steuerung)

Vorteil:
- Keine Kenntnis des Zielzustands nötig
- Nichtinvasiv: verschwindende Kontrolle bei erfolgreicher Stabilisierung

Bsp.: (i) Stabilisierung eines instabilen periodischen Orbits mit Periode T:

↳ Wahl von $\tau = T$: $\underline{x}(t) = \underline{x}(t-\tau)$ und somit verschwindendes Kontrollsignal $\underline{u}(t)$.

(ii) Stabilisierung von Fixpunkten (Fokus) 

↳ Zeitskala: $\frac{2\pi}{\mathrm{Im}(\lambda)}$

Kontrollparameter: τ: Zeitverzögerung

$\underline{\underline{K}}$: Rückkopplungsmatrix

häufig: $\underline{\underline{K}} = \underset{\uparrow \text{ Skalar}}{K}\ \underset{\uparrow \text{ Einheitsmatrix}}{\mathbb{1}}$

Bsp.: Rössler-System: chaotisch für $a = 0.2 = b$, $c = 6.5$ (vgl. S. 7

$$\dot{x}(t) = -y(t) - z(t) \qquad - K\left[x(t) - x(t-\tau)\right]$$

$$\dot{y}(t) = x(t) + a\,y(t)$$

$$\dot{z}(t) = b + z(t)\left[x(t) - c\right]$$

- Periode-1-Orbit: $T_1 = 5.91679\ldots$
- Periode-2-Orbit: $T_2 = 11.82844\ldots$

Stabilisierung von Periode-1-Orbit für $0.24 < K < 2.3$

Referenz: A. Balanov, N. Janson, E. Schöll, PhysRevE 71, 016222 (2005)