

## 2. Übung zur Nichtlinearen Dynamik & Strukturbildung

I

- Inhalt:
1. Besprechung des 1. Blattes
  2. Erzeugung eines dimensionslosen Modells
  3. Poincaré-Abbildung
  4. Poincaré-Bendixson-Theorem

### 1. Besprechung des 1. Übungsblatts

↳ Lösung in Teilschritten

↳ Code-Beispiel

### 2. Erzeugung eines dimensionslosen Modells

(a) vander Pol-OS zillatav:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \ddot{x} + k(x^2 - a)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \Leftrightarrow \dot{y} = -k(x^2 - a)y - \omega_0^2 x \end{aligned}$$

Frage: Brauchtes wirklich 3 Parameter? ( $k, a, \omega_0$ )

Idee: Übergang zu dimensionslosen Einheiten

Bisher:  $[x] = \frac{m}{\text{cm}}$ ,  $[\dot{x}] = \frac{m}{\text{sa}}$ ,  $[\omega_0] = \frac{1}{\text{sec}}$ ,  $[x] = m$

$$\left. \begin{aligned} [k(x^2 - a)\dot{x}] &= \frac{1}{\text{sa}} \quad \text{mit } [x] = m, [\dot{x}] = \frac{m}{\text{sa}} \text{ folgt: } [a] = m^2 \\ \Rightarrow [(x^2 - a)\dot{x}] &= m^2 \frac{m}{\text{sa}} \Rightarrow [k] = \frac{1}{m^2 \text{sa}} \end{aligned} \right\} S: \text{Sekunde}$$

Ziel:  $x' = \eta$

$$\eta' = -\sqrt{k}(\eta^2 - 1)\eta - \eta \quad \text{mit } \eta' = \frac{d}{dt} \eta = \frac{d}{ds} \eta(s)$$

↑  
neu Zeit  
(dimensionslos)

Ansatz: reskalierte Zeit:  $t = t_c s$  (dimensionslos)

reskalierte Variablen:  $x(t) = x_c X(s)$

$y(t) = y_c \eta(s)$

mit geeignet gewählten charakteristischen Faktoren  $t_c, x_c, y_c$

Einsatz liefert:

2/

$$(i) \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} \left( x_c \chi\left(\frac{t}{t_c}\right) \right) = \frac{d}{d\left(\frac{t}{t_c}\right)} \left( x_c \chi(s) \right) = \frac{x_c}{t_c} \frac{d}{ds} \chi(s) = \frac{x_c}{t_c} \chi'(s)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{x_c}{t_c} \chi'(s) = y(t) = y_c \psi(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\chi'(s) = \frac{y_c t_c}{x_c} \psi(s)}$$

$$(ii) \frac{d}{dt} y(t) = \frac{d}{dt} \left( y_c \psi\left(\frac{t}{t_c}\right) \right) = \frac{d}{d\left(\frac{t}{t_c}\right)} \left( y_c \psi(s) \right) = \frac{y_c}{t_c} \frac{d}{ds} \psi(s) = \frac{y_c}{t_c} \psi'(s)$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = \frac{y_c}{t_c} \psi'(s) = -k \left( x(t)^2 - a \right) y(t) - \omega_0^2 x(t)$$

$$= -k \left( x_c^2 \chi\left(\frac{t}{t_c}\right)^2 - a \right) y_c \psi\left(\frac{t}{t_c}\right) - \omega_0^2 x_c \chi\left(\frac{t}{t_c}\right)$$

$$= -k x_c^2 y_c \left( \chi(s)^2 - \frac{a}{x_c^2} \right) \psi(s) - \omega_0^2 x_c \chi(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi'(s) = -k x_c^2 t_c \left( \chi(s)^2 - \frac{a}{x_c^2} \right) \psi(s) - \omega_0^2 \frac{x_c t_c}{y_c} \chi(s)}$$

Komplizierter als zuvor? Nicht wirklich, denn wir wählen jetzt  $t_c, y_c$  geschickt (so dass die Gleichungen vereinfacht einfache werden)

$$\left. \begin{array}{l} \text{etwa so: } \frac{a}{x_c^2} = 1 \quad (\text{gibt weil } a > 0) \\ \frac{y_c t_c}{x_c} = 1 \quad \text{und} \quad \omega_0^2 \frac{x_c t_c}{y_c} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dazu versuchen} \\ \text{wir den Rest in} \\ \text{einem } \tilde{k}\text{-Parameter} \end{array}$$

$$\Rightarrow x_c = \sqrt{a}, \quad t_c = \frac{1}{\omega_0}, \quad y_c = \sqrt{a} \omega_0$$

Skalierung wegen  
Reskalierung von  $x$

Skalierung wegen  
dieser Parameterzeit

$$\Rightarrow \chi(s) = \psi(s)$$

$$\psi'(s) = -k x_c^2 t_c \left( \chi(s)^2 - 1 \right) \psi(s) - \chi(s)$$

$$=: \tilde{k} = k a$$

$$\text{check: } [\tilde{k}] = \frac{1}{\text{m}^2 \text{sec}} \cdot \frac{1}{\text{s}^2} = 1$$

Abschreiben mit gewählten Variablen/Parametern:

über  $(x \rightarrow X, y \rightarrow Y, s \rightarrow t, \tilde{k} \rightarrow k)$

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = -k(X^2 - 1)Y - X \end{cases}$$

(b) Josephson junctionen: Tunneln zwischen 2 Supraleitern (1973 Nobelpreis)  
 siehe Strogatz-Buch S. 109 ff

$$\frac{\hbar C}{2e} \ddot{\phi} + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\phi} + I_c \sin \phi = I \quad (\Leftrightarrow C\dot{V} + \frac{V}{R} + I_c \sin \phi = I)$$

$$\frac{\psi_1 e^{i\phi_1}}{\psi_2 e^{i\phi_2}}$$

$\phi = \phi_2 - \phi_1, \quad I_c \sin \phi = I$  (Strom-Phase-Beziehung)  
 $\dot{\phi} = 0, \text{ RP!}$

$I_c > I$ : Spannungs-Phase-Beziehung:  $V = \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi}$  (phase slip)  
 ↑  
 Spannung über die Barriere

(Analogie zu gedämpfter Pendel:  $m\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \cos \theta = \Gamma$ )  
 gedämpft

Dimensionslose Einheitsform:  $\phi(t) = x_c \gamma(s)$   
 $t = t_s s$

$$\Rightarrow \dot{\phi}(t) = \frac{d}{dt} \phi(t) = \frac{x_c}{t_s} \frac{d}{ds} \gamma(s) = \frac{x_c}{t_s} \gamma'(s)$$

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{x_c^2}{t_s^2} \gamma''(s)$$

Einsetzen in Gleichung:

$$\Rightarrow \frac{\hbar C}{2e} \frac{x_c^2}{t_s^2} \gamma''(s) + \frac{\hbar}{2eR} \frac{x_c}{t_s} \gamma'(s) + I_c \sin \gamma(s) = I \quad | : I_c$$



Wähle:  $x_c = 1$  und  $\frac{h}{2eR I_c} \frac{x}{t_c} = 1 \Rightarrow \frac{1}{t_c} = \frac{2eR I_c}{h}$

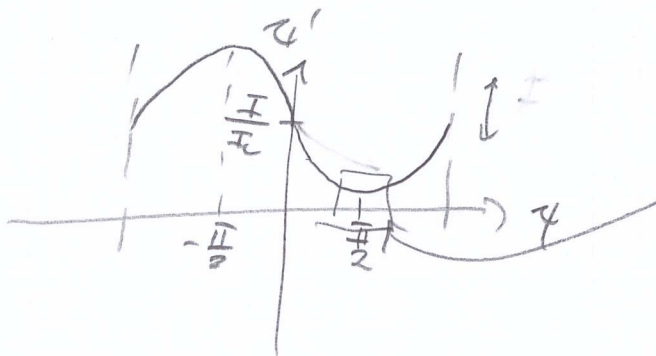
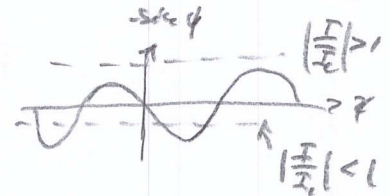
$$\Rightarrow \frac{hC}{2eI_c} \left( \frac{2eR}{h} \right)^2 \varphi''(s) + \varphi'(s) + \sin \varphi(s) = \frac{I}{I_c}$$

$$= \frac{2CeR^2 I_c}{h} =: \beta \quad (\text{McCumber parameter, dimensionless (ohne Kapazität)})$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta \varphi'' + \varphi' + \sin \varphi = \frac{I}{I_c}}$$

Betrachte:  $|\beta| \ll 1 \Rightarrow \varphi' = \frac{I}{I_c} - \sin \varphi$  (cf. Aufg. 4)

FP für  $\varphi' = 0 \Rightarrow \varphi^* = \arcsin \frac{I}{I_c}$

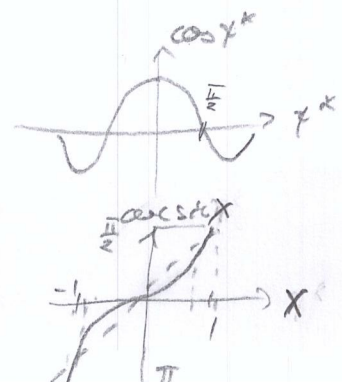
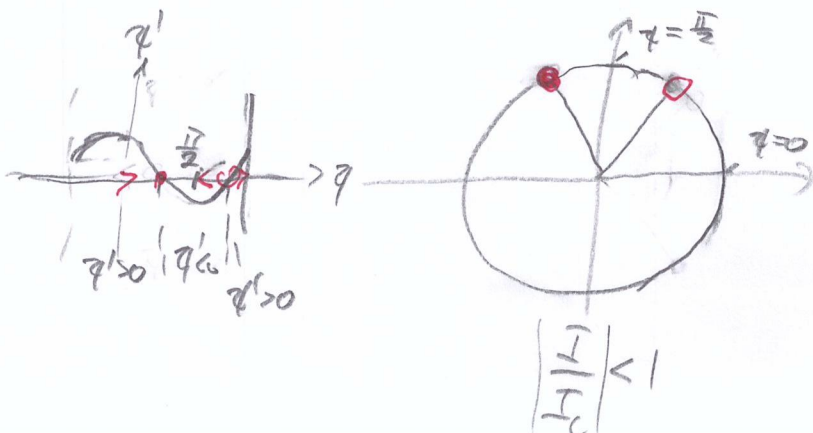


ggt Sattel-Knoten-Bifurkation

$$\left( \sin^2 \varphi^* + \cos^2 \varphi^* = 1 \Rightarrow \left( \frac{I}{I_c} \right)^2 + \cos^2 \varphi^* = 1 \right)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \varphi' = -\cos \varphi^* \Rightarrow \cos \varphi^* = \pm \sqrt{1 - \left( \frac{I}{I_c} \right)^2}$$

$$= \mp \sqrt{1 - \left( \frac{I}{I_c} \right)^2} \Rightarrow \frac{d}{d\varphi} \varphi' \begin{cases} < 0 \text{ für } -\sqrt{1 - \left( \frac{I}{I_c} \right)^2} \text{ stabil} \\ > 0 \text{ für } +\sqrt{1 - \left( \frac{I}{I_c} \right)^2} \text{ instabil} \end{cases}$$



andere Wahl von  $t_c$ :  $\cos I = \bar{I}$

$$t = t_c s \quad \text{mit} \quad t_c = \sqrt{\frac{h c t_c}{2 e I_c}}$$

$$\frac{h c}{2 e I_c} \frac{1}{\sqrt{\frac{h c}{2 e I_c}}} \varphi'' + \frac{h}{2 e R I_c} \frac{1}{\sqrt{\frac{h c}{2 e I_c}}} \varphi' + \sin \varphi = \frac{I_B}{I_c}$$

$$\Rightarrow \varphi'' + \sqrt{\frac{h}{2 e I_c R^2 c}} \varphi' + \sin \varphi = \frac{I_B}{I_c}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi'' + d \varphi' + \sin \varphi = I}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \varphi' &= Y \\ Y' &= I - \sin \varphi - d Y \end{aligned}}$$

Fixpunkt:  $Y^* = 0$ ,  $\sin \varphi^* = I$ , falls  $|I| < 1$

$$\Rightarrow \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \varphi^* & -d \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \cos \varphi^* = \pm \sqrt{1 - I^2}$$

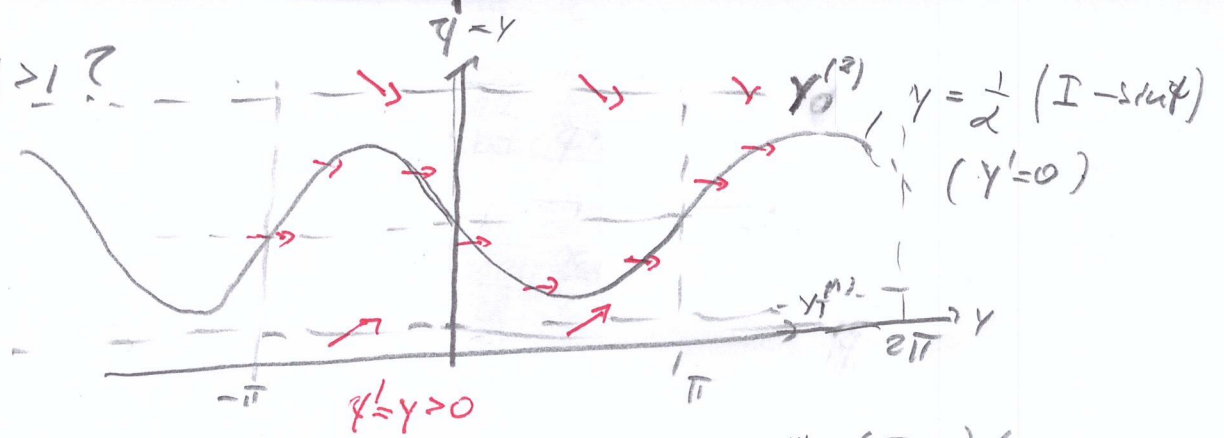
$$\Rightarrow \text{tr} \underline{A} = -d < 0$$

$$\det \underline{A} = \cos \varphi^* = \pm \sqrt{1 - I^2} \quad \left. \vphantom{\det \underline{A}} \right\} (\text{tr} \underline{A})^2 - 4 \det \underline{A} = d^2 \mp 4 \sqrt{1 - I^2}$$

$\Rightarrow$  stabiler Knoten für  $d^2 - 4 \sqrt{1 - I^2} > 0$   
 $\Rightarrow$  siehe Dämpfung oder  $I = 1$   
 stabiler Fokus für  $d^2 + 4 \sqrt{1 - I^2} < 0$

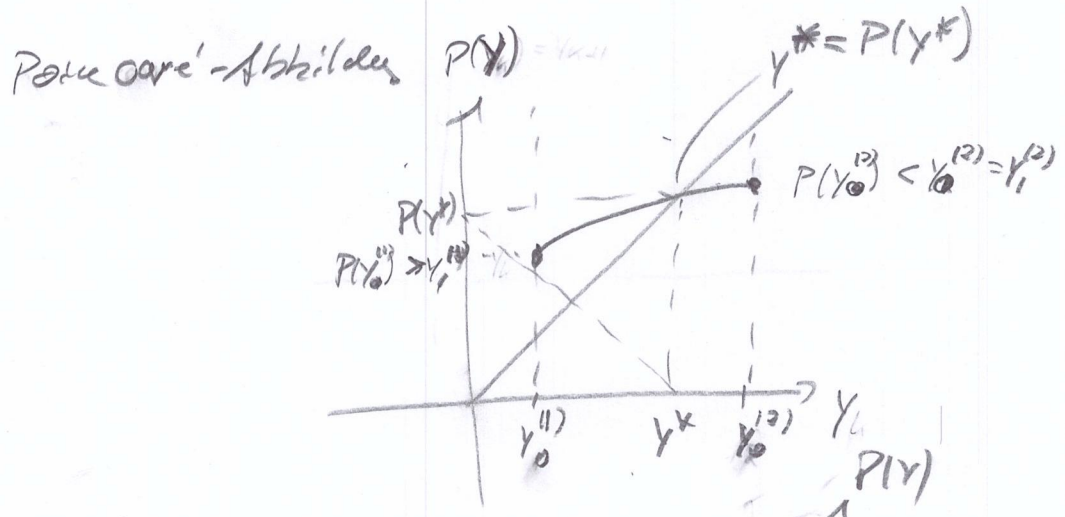
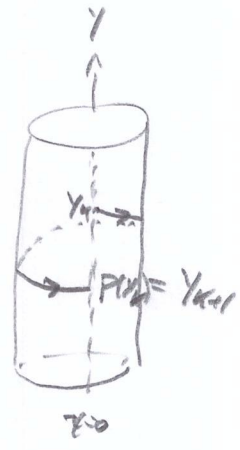
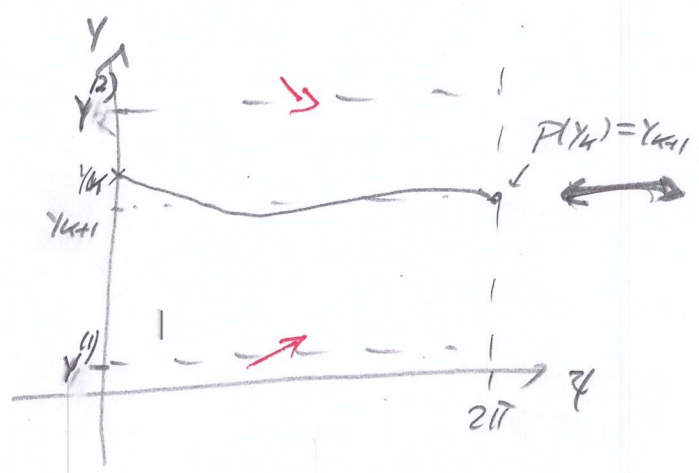
Sattelpunkt für  $d^2 < 0$  ( $\cos \varphi^* = -\sqrt{1 - I^2}$ )

Fall  $|I| > 1$  ?



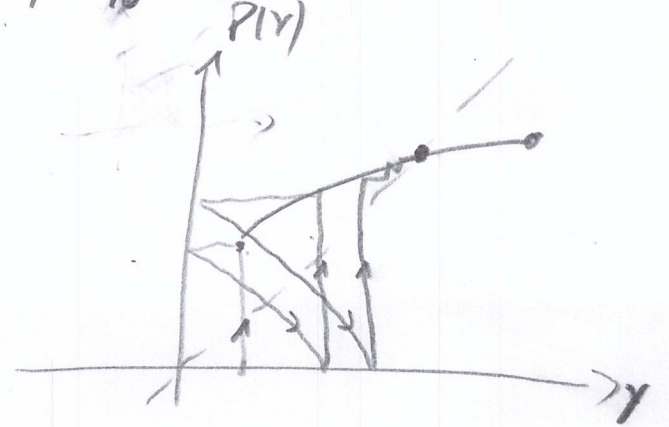
Betrachte  $y^{(1)} \leq y \leq y^{(2)}$  mit  $0 < y^{(1)} < (I-1)/\alpha$   
 $\frac{I+1}{\alpha} < y^{(2)}$

$\Rightarrow$  Trajectories at  $\varphi \in [0, 2\pi]$

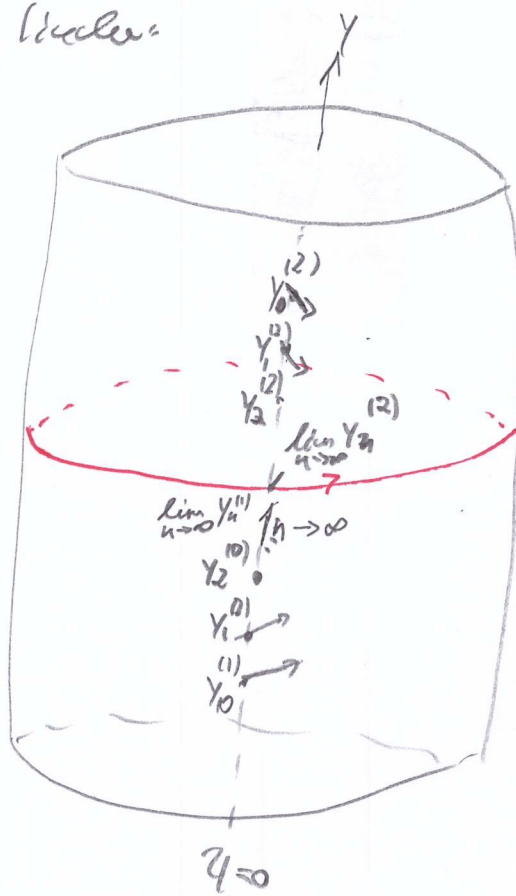


$P(y_0^{(1)}) > y_0^{(1)} \Rightarrow$  nach oben

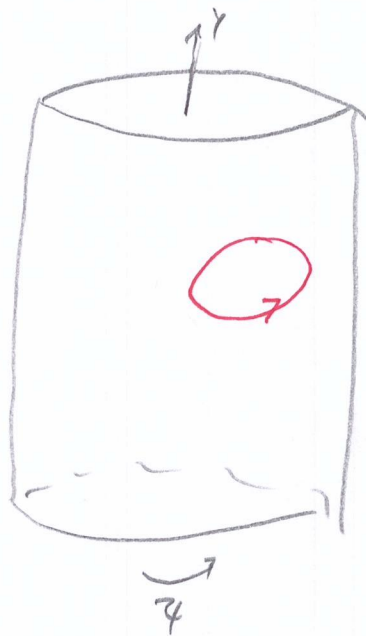
$P(y_0^{(2)}) < y_0^{(2)} \Rightarrow$  nach unten



Auf dem Zylinder:



Achtung:



möglicherweise kein  
Grenzyklus?  
→ nicht hier ( $|II| > 1$ ), weil  
kein Fixpunkt existiert

Bemerkung: Eindeutigkeit auch gegeben!

Strogatz S. 282 per Energiemoment

$$E = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \cos \varphi \Rightarrow \Delta E = 0 \text{ nach 1 Rotation } \int_0^{2\pi}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \int_0^{2\pi} \frac{dE}{d\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} + \sin \varphi \right) d\varphi$$

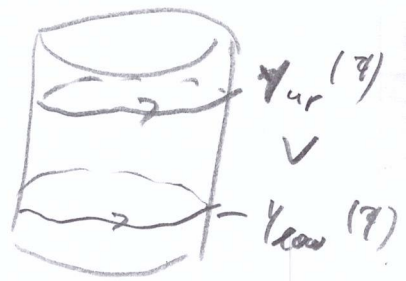
$$= \int_0^{2\pi} \left( I - \cancel{\sin \varphi} - \cancel{d\dot{\varphi}} + \cancel{\sin \varphi} \right) d\varphi$$



also:  $\int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) d\varphi = \frac{2\pi \bar{\gamma}}{d} \quad (*)$

8

für



folgt  $\int_0^{2\pi} \gamma_{ur}(\varphi) d\varphi > \int_0^{2\pi} \gamma_{low}(\varphi) d\varphi$

(\*) gilt nur für  
einen Fall  $(\gamma(\varphi))$