Nichtlineare Dynamik & Strukturbildung (SS24)

VL SS2024, Dr. habil. Philipp Hövel

philipp.hoevel@uni-saarland.de

E2.6, Raum 4.03

22.5 VL: Mi 10–12 E2.6 E11
Do 12–14 E2.6 E11

7.5 UE: s.o.

3 SWS VL, 1 SWS UE $\Rightarrow$ 45h + 15h = 60h

90h Vor-/Nachbereitung $\longrightarrow$ 150h $\hat{=}$ 5 ECTS

MSc Physik / Biophysik

$\Rightarrow \frac{\text{VL+UE}}{\text{ECTS-Zeit}} = \frac{60h}{90h} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2:3$

Note: – Übungsaufgaben bzw. Seminarvortrag
– anschließend mündliche Prüfung

Stil: austauschorientiert, anregend, inkludierend, [illegible]
viele Hinweise rechts & links gebend

"Bergführer" & "Coach"

→ Glossar := individuell
– Def., Begriffe
– Erklärungen, Bilder …

1. Dynamische Systeme

Nichtlineare Dynamik – wichtige Fragestellungen:

- Langzeitverhalten
- Abhängigkeit von äußeren Parametern (Kontrolle)
- ——— " ——— kleinen Störungen
- ——— " ——— Ungenauigkeiten in den Anfangsbedingungen
- globale Aussagen über den dynamischen Fluss
  ↳ Gesamtheit aller Bahnen
- geordnete / ungeordnete Systeme
- ...

⇒ <u>qualitative Dynamik</u>

Bsp.: $\dot{x}(t) = \sin x(t)$ $\qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$

↳ Trennung der Variablen:

$$dt = \frac{dx}{\sin x} \Rightarrow t = \int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left|\frac{\sin x}{1+\cos x}\right| + C$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

$$= -\ln\left|\csc x + \cot x\right| + C = -\ln\left|\overbrace{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}}\right| + C$$

etwa: $x = x_0$ bei $t = 0$

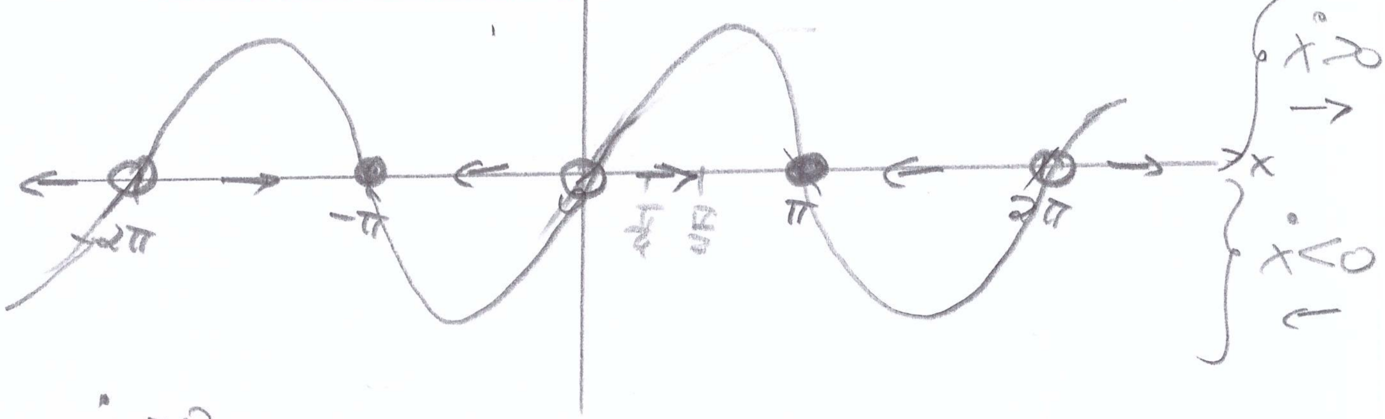
$$\Rightarrow C = \ln\left|\csc x_0 + \cot x_0\right|$$

$$\Rightarrow \quad t = \ln\left|\frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x}\right|$$

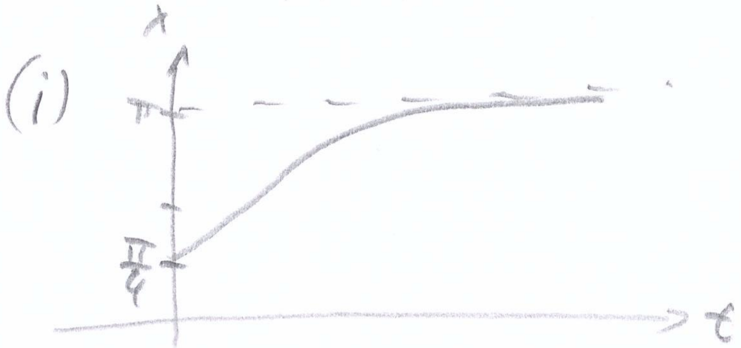
(i) $x_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = ?$

(ii) x_0 beliebig $\Rightarrow \lim x(t) = ?$ $\Big\}$ Langzeitverhalten

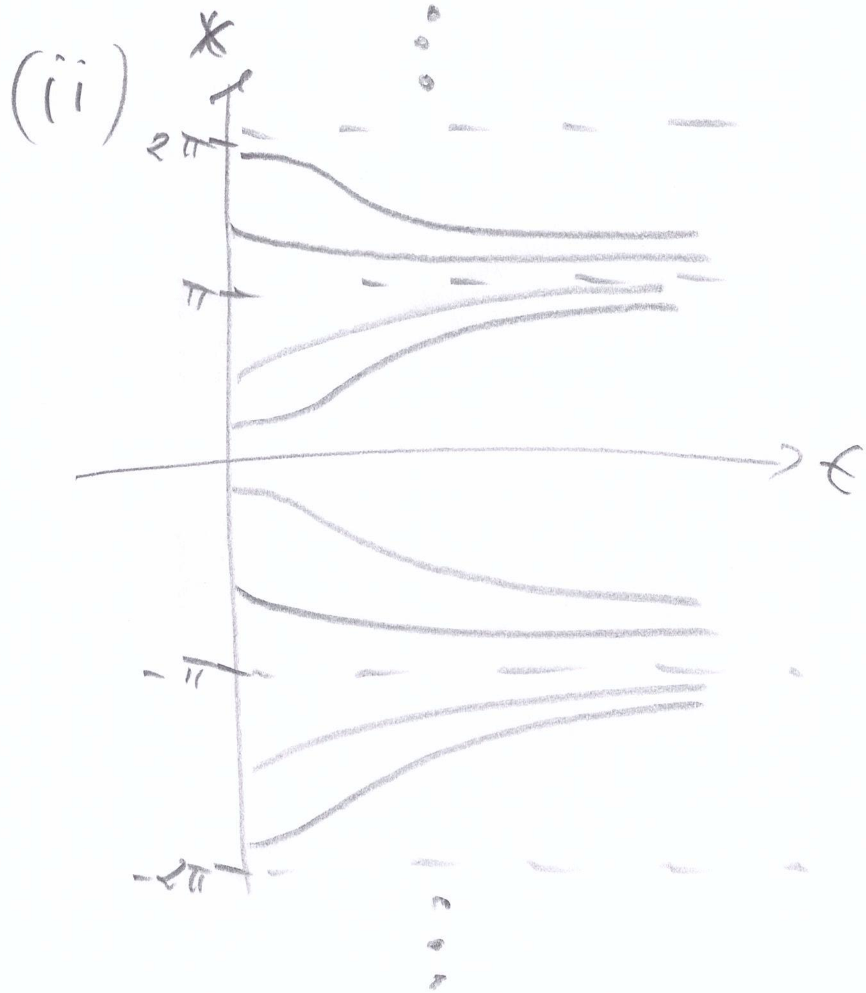
Idee: Phasenraum/portrait



$\dot{x} = 0 \Rightarrow x = n\pi$



Trajektorie



(**Qualitative Dynamik** : Fluss als ganzes, Stabilität, topologische Struktur, Langzeitverhalten)

1.1. Vektorfelder als dynam. Systeme

Dynamik vieler Systeme läßt sich als System von (nichtlin.) Dgln. 1. Ordnung formulieren:

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)}$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ dyn. Var.

$\underline{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld

determinist. dyn. System

z.B. Newton'sche Beweg.gl. mit Reibung

$$\underbrace{\ddot{y} + f_1(y,t)\dot{y}}_{\text{Reibung}} + \underbrace{f_2(y,t)}_{\text{Kraft}} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 := y \\ x_2 := \dot{y} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f_1 x_2 - f_2 \end{array}$$

$$\ddot{y} + f_1 \dot{y} + f_2 y = F \cos t$$

↳ Dimension? => 3

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = t \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f_1 x_2 - f_2 + F \cos x_3 \\ \dot{x}_3 = 1 \Rightarrow x_3(t) = t + t_0 \end{array}$$

=> n-te Ordg + Zeit ≙ (n+1)te Ordng

Speziell Hamilton'sche Systeme:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = q \\ x_2 = p \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{array}$$

$H(q,p)$ Hamiltonfkt. } Stand.

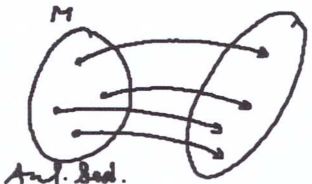
Fluss des Vektorfeldes $\underline{F}$ auf der Mannigfaltigkeit M: (Phasenraum, z.B. $\mathbb{R}^n$)

$$\Phi : M \times \mathbb{R}_t \to M$$

mit $\Phi(\underline{x}_0, t) = \Phi_t(\underline{x}_0)$

$= \underline{x}(t; \underline{x}_0)$

(Gesamtheit der Bahnkurven) = Trajektorien



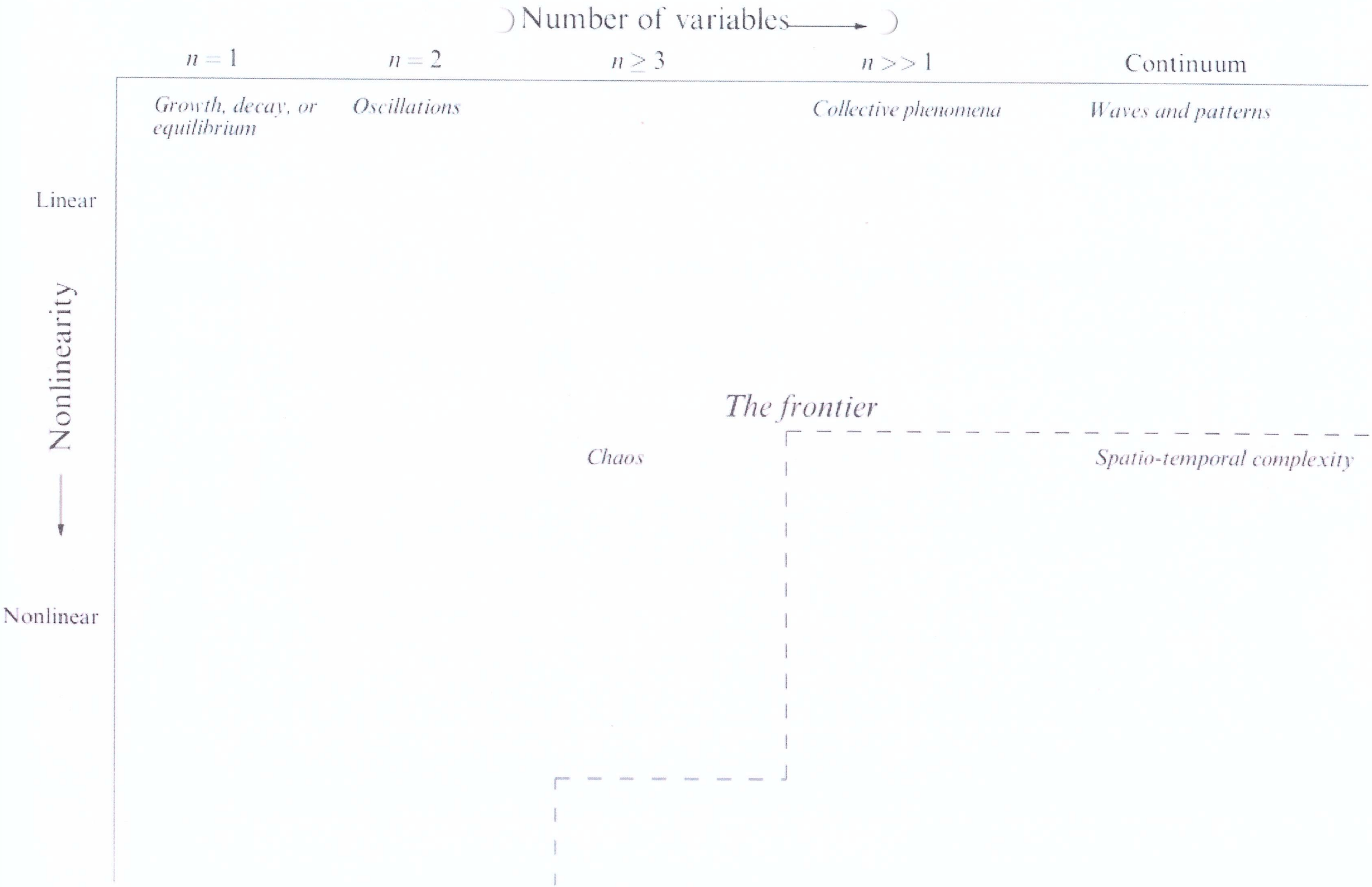
lin. - vs. nonlin.

5

Number of variables →

	$n = 1$	$n = 2$	$n \geq 3$	$n >> 1$	Continuum
Linear	*Growth, decay, or equilibrium* Exponential growth RC circuit Radioactive decay	*Oscillations* Linear oscillator Mass and spring RLC circuit 2-body problem (Kepler, Newton)	Civil engineering, structures Electrical engineering	*Collective phenomena* Coupled harmonic oscillators Solid-state physics Molecular dynamics Equilibrium statistical mechanics	*Waves and patterns* Elasticity Wave equations Electromagnetism (Maxwell) Quantum mechanics (Schrödinger, Heisenberg, Dirac) Heat and diffusion Acoustics Viscous fluids
↓ Nonlinearity				*The frontier*	
Nonlinear	Fixed points → next Bifurcations Overdamped systems, relaxational dynamics Logistic equation for single species	Pendulum Anharmonic oscillators Limit cycles Biological oscillators (neurons, heart cells) Predator-prey cycles Nonlinear electronics (van der Pol, Josephson)	*Chaos* Strange attractors (Lorenz) 3-body problem (Poincaré) Chemical kinetics Iterated maps (Feigenbaum) Fractals (Mandelbrot) Forced nonlinear oscillators (Levinson, Smale) Practical uses of chaos Quantum chaos ?	Coupled nonlinear oscillators Lasers, nonlinear optics Nonequilibrium statistical mechanics Nonlinear solid-state physics (semiconductors) Josephson arrays Heart cell synchronization Neural networks Immune system Ecosystems Economics	*Spatio-temporal complexity* Nonlinear waves (shocks, solitons) Plasmas Earthquakes General relativity (Einstein) Quantum field theory Reaction-diffusion, biological and chemical waves Fibrillation Epilepsy Turbulent fluids (Navier-Stokes) Life

Figure 1.3.1


Number of variables
n = 1
n = 2
n ≥ 3
n >> 1
Continuum
Growth, decay, or equilibrium
Oscillations
Collective phenomena
Waves and patterns
Linear
Nonlinearity
Nonlinear
The frontier
Chaos
Spatio-temporal complexity

5a

$\boxed{\text{Fixpunkt } \underline{x}^*}$ des autonomen dyn. Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$:
(stationäre Pkte., Gleichgewichtspkte., singuläre Pkte., krit. Pkte)

$$0 \overset{!}{=} \dot{\underline{x}} = F(\underline{x}^*) \quad \Rightarrow \quad \underline{x}^*$$

Stabilität eines Fixpunktes:

Test durch Linearisierung für kleine Auslenkungen
$\delta\underline{x} := \underline{x} - \underline{x}^*$;

$$\boxed{\delta\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{x^*} \delta x_k}$$

$$\boxed{\delta\dot{\underline{x}} = (DF)_* \, \delta\underline{x}}$$ mit $\boxed{\text{Jacobi-Matrix } DF}$

VL1

System von lin. Dgl. mit konst. Koeff.

Lösungsansatz $\delta\underline{x}(t) = \underline{\xi}\, e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \lambda \underline{\xi} = A \underline{\xi}$

$\det(A - \lambda 1) = 0$ liefert Eigenwertgl.

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_k & : \text{Eigenwerte} \\ \underline{\xi}^{(k)} & : \text{Eigenvektoren} \end{array}\right\} \text{der Jacobi-Matrix } (DF)_* = A$$

allg. Lösung: $\delta\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \underline{\xi}^{(k)} e^{\lambda_k t}$

(Annahme: keine entarteten Eigenwerte λ_k
c_k durch Anfangsbed. bestimmt)

Beispiele: (i) Ebenes Pendel $\quad m l^2 \ddot{\varphi} + m g l \sin\varphi = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi \\ x_2 = p_\varphi = m l^2 \dot{\varphi} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dfrac{x_2}{m l^2} \\ \dot{x}_2 = -m g l \sin x_1 \end{array}$$

$\underline{x}^*$: Fixpunkt eines autonomen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$

$\Rightarrow \dot{\underline{x}} = 0 = \underline{F}(\underline{x}^*)$

(lineare) Stabilitätsanalyse: $\delta\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^*$ (kleine Auslenkungen)

$\Rightarrow$ in 1. Näherung: $\delta\dot{\underline{x}} = \left(\underline{\underline{DF}}\right)_{\underline{x}^*} \delta\underline{x}$, $\underline{\underline{DF}}$: Jacobi-Matrix

$$\delta\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{\underline{x}^*} \delta x_k$$

nullte Näherung: $\underline{F}(\underline{x}^*) = 0$

$\Rightarrow$ System von linearen DGLs mit konstanten Koeffizienten

$\Rightarrow$ Lösungsansatz: $\delta\underline{x}(t) = \underline{\xi}\, e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda \underline{\xi} e^{\lambda t} = \underbrace{\left(\underline{\underline{DF}}\right)_{\underline{x}^*}}_{=:\underline{\underline{A}}} \underline{\xi}\, e^{\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda \underline{\xi} = \underline{\underline{A}}\, \underline{\xi} \qquad \text{Eigenwertgleichung}$$

Berechnung von λ: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = 0$ liefert λ_k : Eigenwerte $k = 1, \dots, n$

Einheitsmatrix

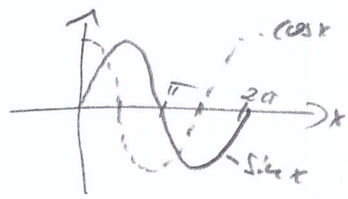
$\underline{\xi}^{(k)}$: Eigenvektoren

allgemeine Lösung: $\delta\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \underline{\xi}^{(k)} e^{\lambda_k t}$

Bsp.: (i) Ebenes/mathematisches Pendel

$$m l \ddot{\varphi} + m g \sin\varphi = 0$$

Einheitencheck $[m l \ddot{\varphi}] = \frac{kg\, m}{s^2} = [m g \sin\varphi]$

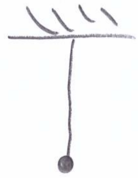


$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi \\ x_2 &= p_\varphi = m l \dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{m l} \\ \dot{x}_2 &= -m g \sin x_1 \end{aligned}$$

Fixpunkte: $\dot{x}_1 = 0 = \dot{x}_2 \Rightarrow x_2 = 0$, $x_1 = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$

Linearisierung:
$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l} \\ -m g \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}_{\underline{x}^*} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

a) $x_1^* = x_2^* = 0$ (ähnlich auch $x_1^* = 2n\pi$, $n = 1, 2, \dots$)

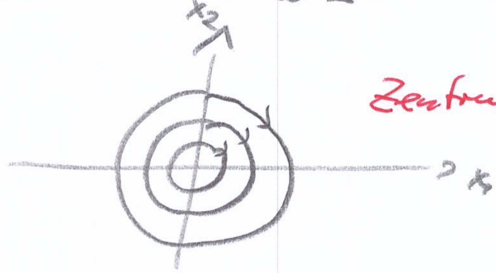


$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l} \\ -m g & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{m l} \\ -m g & -\lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i\omega$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \delta\underline{x}(t) + \underbrace{\underline{x}^*}_{=0} = C_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{+i\omega t} + C_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-i\omega t}$$

ungedämpfte Schwingung



Zentrum

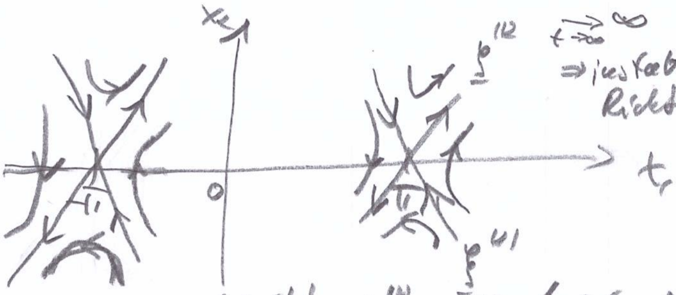
b) $x_2^* = 0$, $x_1^* = \pi$ (oder $x_1^* = (2n+1)\pi$)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l} \\ m g & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{m l} \\ m g & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{g}{l}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\Rightarrow \delta\underline{x}(t) = C_1 \underline{\xi}^{(1)} \underbrace{e^{+\sqrt{\frac{g}{l}}\, t}}_{\xrightarrow{t\to\infty} \infty} + C_2 \underline{\xi}^{(2)} \underbrace{e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}\, t}}_{\xrightarrow{t\to\infty} 0}$$

$\Rightarrow$ instabile Richtung!



Sattelpunkt

$\underline{\underline{A}}$ nicht symmetrisch! $\Rightarrow \underline{\xi}^{(1)} \not\perp \underline{\xi}^{(2)}$ Achtung: lokale Aussagen!

(ii) Ebenes Pendel mit Reibung: $\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0$

$$\hookrightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{ml} \\ \dot{x}_2 &= -mg\sin x_1 - 2\gamma x_2 \end{aligned}\right\} \text{ Fixpunkte unverändert}$$

Linearisierung: $\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml} \\ -mg\cos x_1^* & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$

a) $x_1^* = x_2^* = 0$:

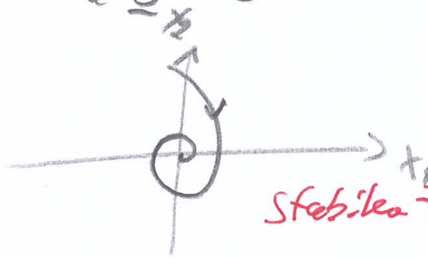
$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml} \\ -mg & -2\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml} \\ -mg & -2\gamma-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \frac{g}{l}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

(a₁) Schwache Reibung: $\gamma^2 < \omega^2$

$$\delta\underline{x}(t) = C_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{-\gamma t} e^{i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t} + C_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-\gamma t} e^{-i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t}$$

gedämpfte Schwingungen:

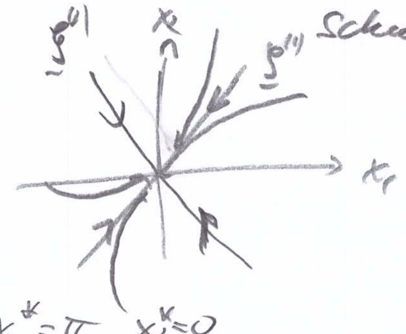


Stabiler Fokus

(a₂) Starke Reibung: $\gamma^2 > \omega^2$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$$

$$\Rightarrow \delta\underline{x}(t) = \underbrace{C_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}}_{\text{schnellere Richtung}} + \underbrace{C_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}}_{\text{langsamere Richtung}}$$



Stabiler Knoten

b) $x_1^* = \pi$, $x_2^* = 0$

$$\Rightarrow \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml} \\ mg & -2\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml} \\ mg & -2\gamma-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\gamma\lambda - \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\omega^2+\gamma^2}}_{>\gamma} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{matrix}$$

Sattelpunkt

1.2. Stabilität und Langzeitverhalten

Sei $\underline{x}^*$ Fixpunkt des dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$.

Def: $\underline{x}^*$ heißt (Ljapunov-) stabil, wenn es zu jeder Umgebung U von $\underline{x}^*$ eine Umgebung V von $\underline{x}^*$ gibt, so dass gilt:

$$\underline{x} \in V \Rightarrow \phi(\underline{x}, t) \in U \quad \forall\, t \geq 0.$$

"Trajektorien bleiben in der Nähe"
(Zentren eingeschlossen)

Kriterium: Kein Eigenwert von $(\underline{\underline{DF}})_{\underline{x}^*}$ positiv
($\lambda = 0$ erlaubt)

Def: $\underline{x}^*$ heißt asymptotisch stabil, wenn zu $\underline{x}^*$ eine Umgebung U existiert, so dass gilt:

(i) $\phi(U, t_2) \subset \phi(U, t_1) \subset U$ für $0 < t_1 < t_2$

(ii) $\lim\limits_{t \to \infty} \phi(\underline{x}, t) = \underline{x}^* \quad \forall\, \underline{x} \in U$

Kriterium: Alle Eigenwerte von $(\underline{\underline{DF}})_{\underline{x}^*}$ negativ.

Def: Ein dynamisches System heißt dissipativ, wenn Phasenraumvolumina schrumpfen

Aufgabe zum Denken bis VL 3:

Hamiltonsche Systeme: $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$

Frage: Sind Fixpunkte Hamiltonscher Systeme asymptotisch stabil?

allgemeines System mit $n=2$

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \delta \underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\, \delta \underline{x}$$

Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$:

$$0 \overset{!}{=} \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \mathbb{1}) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}\, a_{21}$$

$$= \lambda^2 - \lambda \underbrace{(a_{11}+a_{22})}_{= \operatorname{tr} \underline{\underline{A}} \text{ (Spur)}} + \underbrace{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}_{\det \underline{\underline{A}}}$$

$$= \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} \underline{\underline{A}} + \det \underline{\underline{A}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr} \underline{\underline{A}} \pm \sqrt{(\operatorname{tr} \underline{\underline{A}})^2 - 4 \det \underline{\underline{A}}} \right)$$

Bemerkung: $\operatorname{tr} \underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \underline{f}$ (Divergenz)

Fallunterscheidung:

(a) stabiler Fokus: $\det \underline{\underline{A}} > 0$, $\operatorname{tr} \underline{\underline{A}} < 0$

Für $(\operatorname{tr} \underline{\underline{A}})^2 < 4 \det \underline{\underline{A}}$: $\lambda_{1,2} = -\lambda_0 \pm i\omega$ mit $\lambda_0, \omega > 0$

$\Rightarrow$ gedämpfte Oszillationen

(b) instabiler Fokus: $\det \underline{\underline{A}} > 0$, $\operatorname{tr} \underline{\underline{A}} > 0$

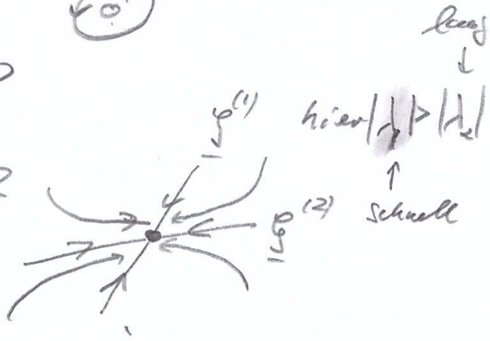
Für $(\operatorname{tr} \underline{\underline{A}})^2 < 4 \det \underline{\underline{A}}$: $\lambda_{1,2} = +\lambda_0 \pm i\omega$ mit $\lambda_0, \omega > 0$

$\Rightarrow$ entdämpfte Oszillationen

(c) stabiler Knoten: $\det \underline{\underline{A}} > 0$, $\operatorname{tr} \underline{\underline{A}} < 0$

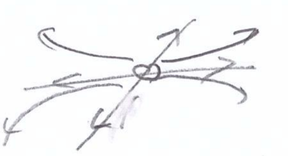
Für $(\operatorname{tr} \underline{\underline{A}})^2 > 4 \det \underline{\underline{A}}$: $\left.\begin{matrix} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ exponentieller Zerfall



(d) instabiler Knoten: $\det \underline{\underline{A}} > 0$, $\operatorname{tr} \underline{\underline{A}} > 0$

Für $(\operatorname{tr} \underline{\underline{A}})^2 > 4 \det \underline{\underline{A}}$: $\left.\begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}$

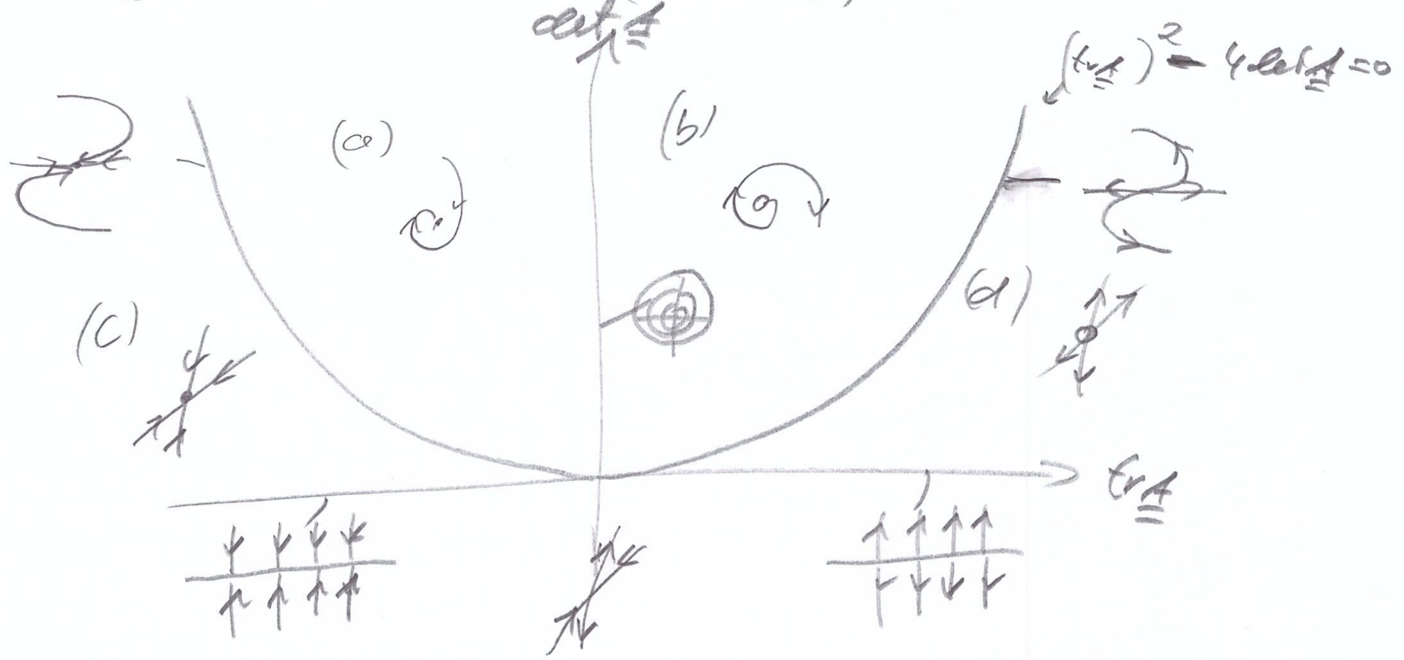


$\Rightarrow$ exponentielle Entdämpfung

(e) **Sattelpunkt**: $\det \underline{\underline{A}} < 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0\end{array}\right\} \in \mathbb{R}$$

alles zusammen in der $(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}}, \det \underline{\underline{A}})$-Ebene:



Grenze zwischen den 5 Bereichen: entartete Fälle

$\Rightarrow$ lineare Stabilitätsanalyse versagt

(Zentrum, schwache stabiler/instabiler Fokus)

Hamiltonsche Vektorfelder:

$$\dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2f}$$

Freiheitsgrade

Linearisierung um Fixpunkt $\underline{x}^*$: $\delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^* \Rightarrow \delta \dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\, \delta \underline{x}$

$$= \sum_{k=1}^{2f} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{\underline{x}^*} \delta x_k$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = \mathrm{div}\,\underline{F} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0$$

Aus $0 = \mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{2f} \lambda_k$ folgt: Keine asymptotisch stabilen Fixpunkte möglich!

Beweis: sonst müssten alle $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$ sein!

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{2f} \mathrm{Re}\,\lambda_k + i \underbrace{\sum_{k=1}^{2f} \mathrm{Im}\,\lambda_k}_{=0 \text{ (komplex konj.)}} < 0 \quad ↯$$

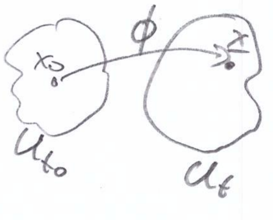
Nichtasymptotisch stabil, falls kein $\mathrm{Re}\,\lambda_k > 0$

$\Rightarrow$ nur $\mathrm{Re}\,\lambda_k = 0$ erlaubt $\Rightarrow \lambda_k = \pm i\omega \Rightarrow$ Zentren

Für Hamiltonsche Systeme folgt aus $\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = \mathrm{div}\,\underline{F} = 0$ der Liouvillesche Satz der klassischen, statistischen Mechanik

Phasenraumvolumen V_t zur Zeit t:

$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$, $\underline{\underline{A}} = D\underline{F}\big|_{x^*}$



$$V_t = \int_{U_t} d^{2f}x$$

Parametrisierung

$$= \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \,\det D\phi_t(x_0)$$

$$= \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \left[1 + (t-t_0) \underbrace{\sum_{k=1}^{2f} \frac{\partial F_k}{\partial x_0^{(k)}}}_{= \mathrm{div}\,\underline{F}} + \dots \right]$$

$$= V_{t_0} + (t-t_0) \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \,\mathrm{div}\,\underline{F}\big|_{x_0} + O((t-t_0)^2)$$

$\phi_t(x_0) = \underline{x}(t)$

$D\phi_t(x_0) = \frac{\partial x^{(i)}(t)}{\partial x_0^{(k)}}$

$\approx \underbrace{\frac{\partial x_0^{(i)}}{\partial x_0^{(k)}}}_{\delta_{ik}} + (t-t_0) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x^{(i)}(t)}{\partial x_0^{(k)}}}_{\frac{\partial F_i}{\partial x_0^{(k)}}}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} V_t = \lim_{t \to t_0} \frac{V_t - V_{t_0}}{t - t_0} = \int_{U_t} d^{2f}x_0 \underbrace{(\mathrm{div}\,\underline{F})_{x_0}}_{=0} = 0$$

Somit bleibt das Phasenraumvolumen erhalten!

Für **dissipative Systeme** gilt für kleine Volumina, die einen asymptotisch stabilen Fixpunkt $\underline{x}^*$ umschließen:

$$\frac{dV_t}{dt} \approx \int_{U_t} d^{2k}x_0 \left(\mathrm{div}\,\underline{F}\right)_{\underline{x}^*} = \Lambda V_t \Rightarrow V(t) = e^{\Lambda t} V_0$$

mit der Phasenraumkontraktionsrate $\Lambda = \underset{<0}{\mathrm{div}\,\underline{F}} = \mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{2k} \mathrm{Re}\,\lambda_k$

Def.: Dissipative Systeme sind solche, die Phasenraumvolumina kontrahieren.

Das **Langzeitverhalten** dissipativer Systeme wird durch **Attraktoren** bestimmt.

Bsp. für dissipatives System: Lorenz-Modell
(Edward Lorenz, J. Atmos. Science 20, 130 (1963))

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -xz + rz - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}\right\} \quad x=y=z=0 \text{ ist Fixpunkt} \quad D\underline{F} = \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z & -1 & r-x \\ y & x & -b \end{pmatrix}. \qquad \sigma, r, b > 0$$

$$\Rightarrow \Lambda = \mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = -(\sigma + 1 + b) < 0$$

$$\Rightarrow V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t} V_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

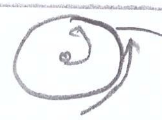
Def.: Sei $\underline{F}$ ein Vektorfeld auf M (hier meist $\mathbb{R}^n$). Eine abgeschlossene, unter dem Fluss ϕ_t invariante ($\phi_t(A) \subseteq A$), unzerlegbare Teilmenge $A \subset M$ heißt **Attraktor**, wenn

(i) $A \subset U_0$ (offene Umgebung von A) existiert mit $\phi_t(U_0) \subseteq U_0^{(t)}$

(ii) $\forall V$ mit $A \subset V \subset U_0$ existiert $T > 0$, sodass $\phi_t(U_0) \subset V$ für $t > T$

(d.h. es gibt ein **Attraktorbecken** U_0, aus dem der Fluss asymptotisch in den Attraktor läuft)

Beispiele

Dimension n des Phasenraums	Attraktor	Attraktordimension d	Bild
1	stabiler Fixpunkt	0	
2	stabiler Grenzzyklus	1	 periodischer Orbit
3	stabiler Torus	2	 quasiperiodisch (2 Frequenzen $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$
≥ 3	seltsamer Attraktor	$2 < d < 3$ fraktal	chaotisch

2. Bifurkationen

2.1 Eigenwert-Null-Bifurkation

2.2 Hopf-Bifurkation

2.3 Lokale Bifurkationen von Grenzzyklen

2.4 Globale Bifurkationen von Grenzzyklen

2.5 Bifurkation von räumlichen Mustern

Frage: Abhängigkeit des Flusses (eines dynamischen Systems / Vektorfeldes) von einem Kontrollparameter μ?

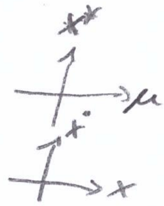
↳ Zahl & Art der Attraktoren kann sich schlagartig bei einem kritischen Wert μ_c ändern $\Rightarrow$ Bifurkation am Bifurkationspunkt μ_c
("Verzweigung" der Lösungsmannigfaltigkeit)

Notwendige Voraussetzung: Nichtlinearität

Untersuchung mittels linearer Stabilitätsanalyse
↳ z.B.: Stabilität der Fixpunkte (lokale Bifurkation)

2.1 Eigenwert-Null-Bifurkationen

Dreiklang: (a) Normalform $\dot{x} = f(x)$
(b) Bifurkationsdiagramm
(c) Phasenraumportrait



Idee der Eigenwert-Null-Bifurkationen:

$\lambda < 0 \longrightarrow \lambda > 0$ bei μ_c

stabiler Fixpunkt $\longrightarrow$ instabiler Fixpunkt

$\det \underline{\underline{A}} > 0$ (Knoten) $\longrightarrow$ $\det \underline{\underline{A}} < 0$ (Sattelpunkt)

(i) Sattel-Knoten-Bifurkation

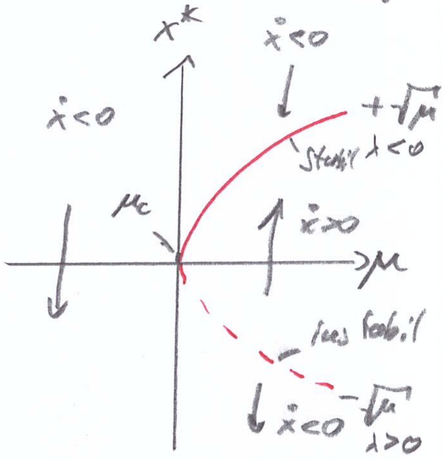
Normalform: $\dot{x} = \mu - x^2$

⇒ FP: $x^* = \pm\sqrt{\mu}$ (existiert nur für $\mu > 0$)

⇒ $\delta x = x - x^*$: $\delta\dot{x} = \underbrace{-2x^*}_{(D\underline{F})_{x^*} \text{ hier } 1\times 1}\delta x$

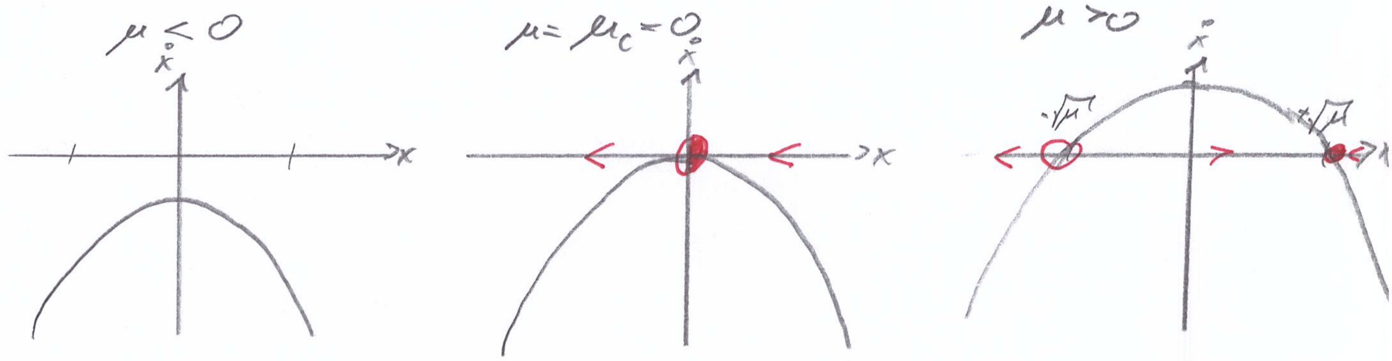
⇒ $x^* = \begin{cases} +\sqrt{\mu} \\ -\sqrt{\mu} \end{cases}$ mit $\lambda = \begin{cases} -2\sqrt{\mu} < 0 : \text{stabil} \\ +2\sqrt{\mu} > 0 : \text{instabil} \end{cases}$

⇒ $\lambda = 0$ bei $\mu_c = 0$ (Bifurkationspunkt)



Bifurkationsdiagramm

Phasenportrait:



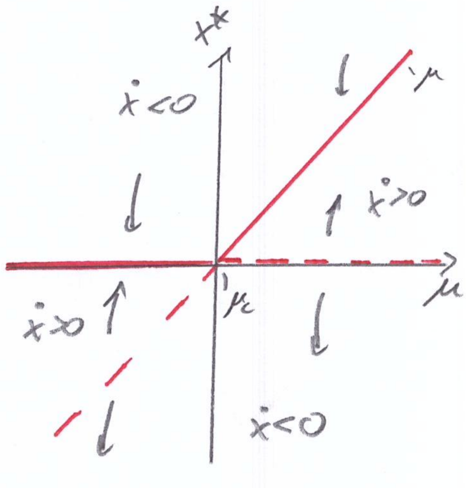
(ii) Transkritische Bifurkation

Normalform: $\dot{x} = \mu x - x^2$

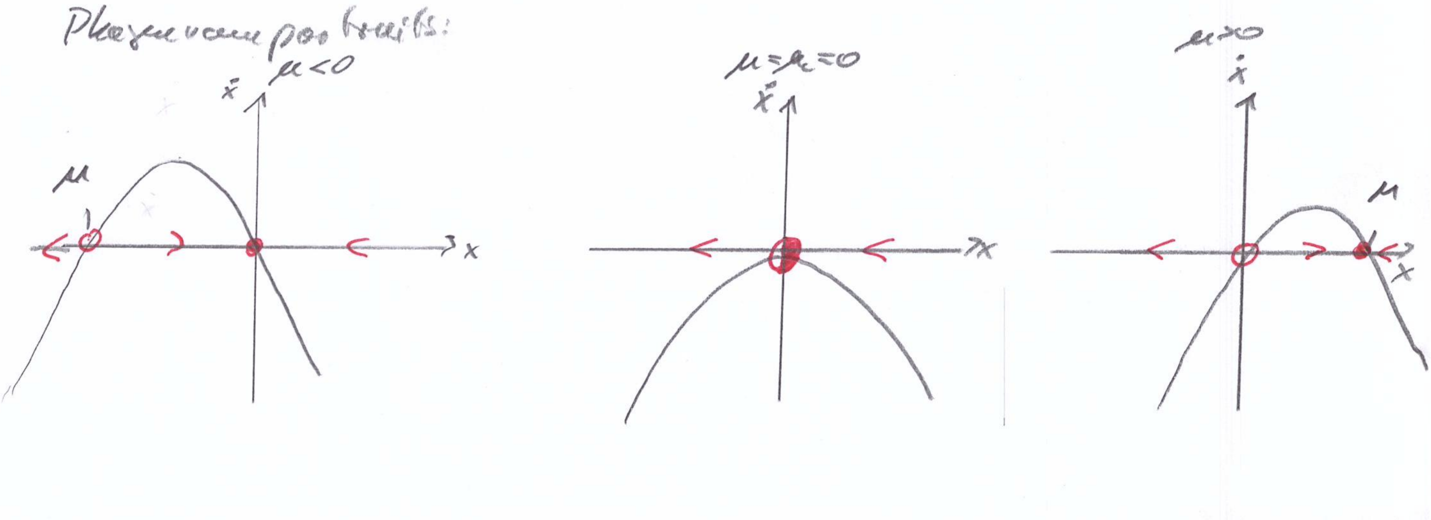
⇒ FP: $x^* = \begin{cases} 0 \\ \mu \end{cases}$ mit $\lambda = \begin{cases} \mu \\ -\mu \end{cases}$

$\delta\dot{x} = (\mu - 2x^*)\delta x$

⇒ Stabilitätswechsel bei $\mu = \mu_c = 0$ ($\lambda = 0$)



Phasenportraits:

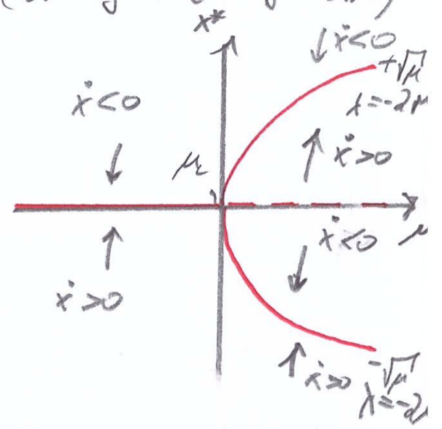


(iii) superkritische Stimmgabel-Bifurkation: (Heugabel-Bifurkation)

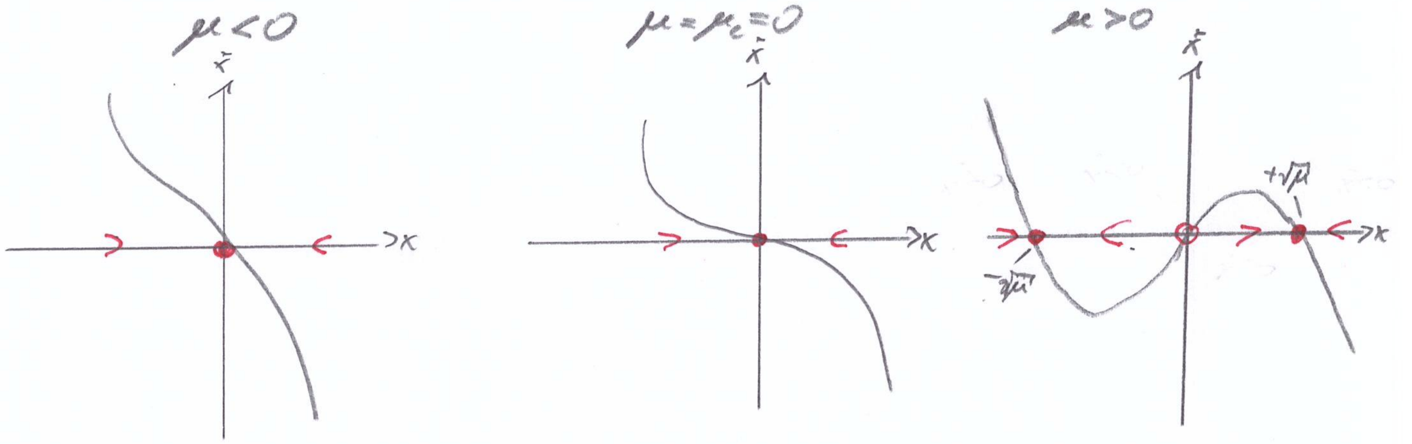
Normalform: $\dot{x} = \mu x - x^3 = x(\mu - x^2)$

$\Rightarrow$ FP: $x^* = \begin{cases} 0 \\ \pm\sqrt{\mu} \end{cases}$ mit $\lambda = \begin{cases} \mu \\ -2\mu \end{cases}$ ex. für $\mu > 0$

$\delta\dot{x} = \left[\mu - 3(x^*)^2\right]\delta x$



Phasenraumportraits:

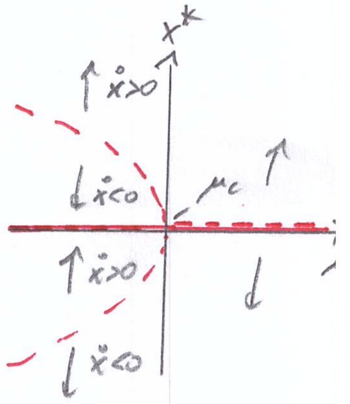


(iv) subkritische Stimmgabel-Bifurkation:

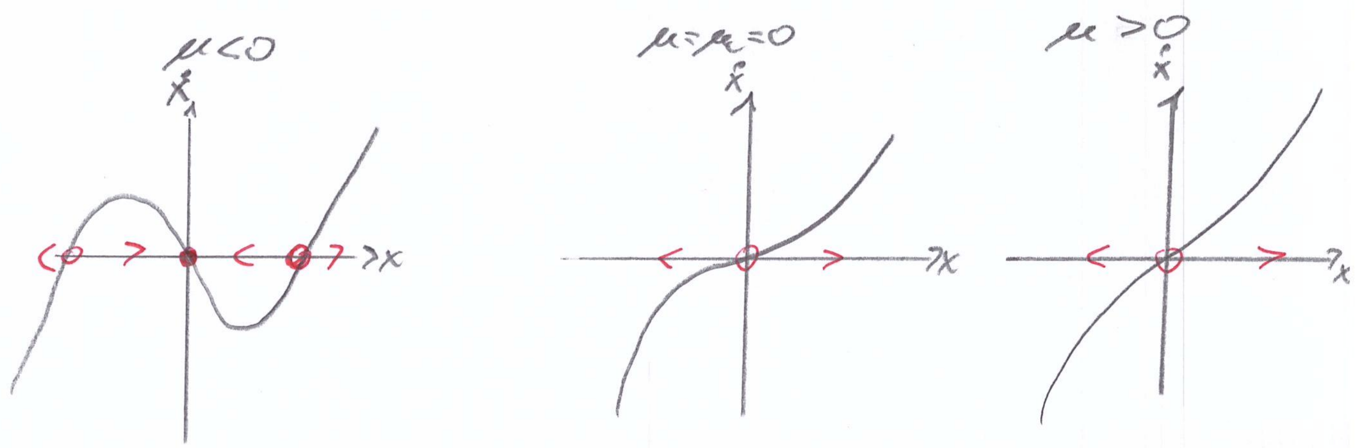
Normalform: $\dot{x} = \mu x + x^3$

$\Rightarrow$ FP: $x^* = \begin{cases} 0 \\ \pm\sqrt{-\mu} \end{cases}$ mit $\lambda = \begin{cases} \mu \\ 2|\mu| \end{cases}$ ex. für $\mu < 0$

$\delta\dot{x} = \left[\mu + 3(x^*)^2\right]\delta x$



Phasenportraits:



2.2 Hopf-Bifurkation

Idee: Fixpunkt ändert seine Stabilität und ein Grenzzyklus (periodische Orbit) wird geboren

Normalform: $\dot z = (\underbrace{\lambda + i\omega}_{\text{linear}} - \underbrace{(1+i\gamma)|z|^2}_{\text{nichtlinear}})\, z$, $z = x+iy \in \mathbb{C}$

in Real- und Imaginärteil: $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\dot x + i\dot y = [\lambda + i\omega - (1+i\gamma)(x^2+y^2)](x+iy)$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \text{Re: } \dot x &= \lambda x - \omega y - (x^2+y^2)(x-\gamma y) \\ \text{Im: } \dot y &= +\omega x + \lambda y - (x^2+y^2)(\gamma x + y) \end{aligned}\right\} \text{nicht sehr kompakt!}$$

Fixpunkt: $x^* = y^* = 0 = z^*$

$\Rightarrow \delta\dot z = (\lambda+i\omega)\,\delta z$, oder in Re/Im: $\begin{pmatrix} \delta\dot x \\ \delta\dot y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$

komplex konjugiert:

$$\delta\dot{\bar z} = (\lambda - i\omega)\,\delta\bar z$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte: $(\lambda-\Lambda)(\lambda-\Lambda)+\omega^2 = \Lambda^2 - 2\lambda\Lambda + \lambda^2+\omega^2 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \Lambda_{1,2} = -\frac{-2\lambda}{2} \pm \sqrt{\lambda^2 - (\lambda^2+\omega^2)} = \lambda \pm i\omega$

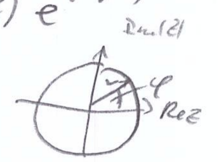
$\Rightarrow$ FP: $z^*=0$ $\begin{cases} \text{stabil für } \lambda<0 \\ \text{instabil für } \lambda>0 \end{cases}$

$\mathrm{tr}\,A = 2\lambda$, $\det A = \lambda^2+\omega^2$

$\Delta = (\mathrm{tr}\,A)^2 - 4\det A = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\omega^2 < 0$

$\Rightarrow$ stabilen $(\lambda>0)$ oder instabilen $(\lambda<0)$ Fokus

Transformation auf Amplitude r und Phase φ: $z(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)}$



$$\Rightarrow \dot z = \dot r e^{i\varphi} + i\dot\varphi r e^{i\varphi} = (\lambda+i\omega-(1+i\gamma)r^2)\, r e^{i\varphi}$$

$\Rightarrow$ Re: $\dot r = (\lambda - r^2)\, r$ $\quad\Rightarrow r^*=0$ oder $(r^*)^2=\lambda$

Im: $\dot\varphi r = (\omega - \gamma r^2)\, r \Leftrightarrow \dot\varphi = \omega - \gamma r^2 \Rightarrow \dot\varphi = \omega - \gamma\lambda \Rightarrow \varphi(t) = (\omega-\gamma\lambda)\,t$

$\Rightarrow$ Fixpunkt: $r=0$

Grenzzyklus: $r = \pm\sqrt{\lambda}$, $\varphi = (\omega-\gamma\lambda)\,t \Rightarrow z(t) = \pm\sqrt{\lambda}\, e^{i(\omega-\gamma\lambda)t}$

Stuart-Landau-Oszillator $\qquad$ Periode $T = \frac{2\pi}{\omega-\gamma\lambda} \Rightarrow T(\lambda=0) = \frac{2\pi}{\omega}$

lineare Stabilität des Grenzzyklus via **Floquet-Theorie**

$\dot{z} = f(z)$ mit periodischem Orbit $z^*(t) = z^*(t+T)$, T: Periode

$$\Rightarrow \delta\dot{z}(t) = Df\big|_{z^*(t)}\,\delta z(t) \quad \text{mit} \quad Df\big|_{z^*(t)} = Df(t) = Df(t+T)$$

lineare Differenzialgleichung mit periodischen Koeffizienten

$\Rightarrow$ Lösung: $\delta z(t) = \sum_j c_j e^{\Lambda_j t} u_j(t)$ mit $u_j(t) = u_j(t+T)$ (**Floquet-Mo**

und $\Lambda_j \in \mathbb{C}$: **Floquet-Exponent**

$\Rightarrow \Lambda u + \dot{u} = Df\, u$, $\delta z(t) = U(t)\,\delta z(0)$, $U(t)$: Fundamentalmatrix

$\mu = e^{\Lambda T}$: Eigenwerte von $U(T)$ **Floquet-Multiplikato**

analytische Lösung von r und φ:

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{r} \\ \delta\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 3r^2 & 0 \\ -2\gamma r & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{z^*(t)} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta\varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ -2\gamma\sqrt{\lambda} & 0 \end{pmatrix}}_{=\underline{A}} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta\varphi \end{pmatrix}$$

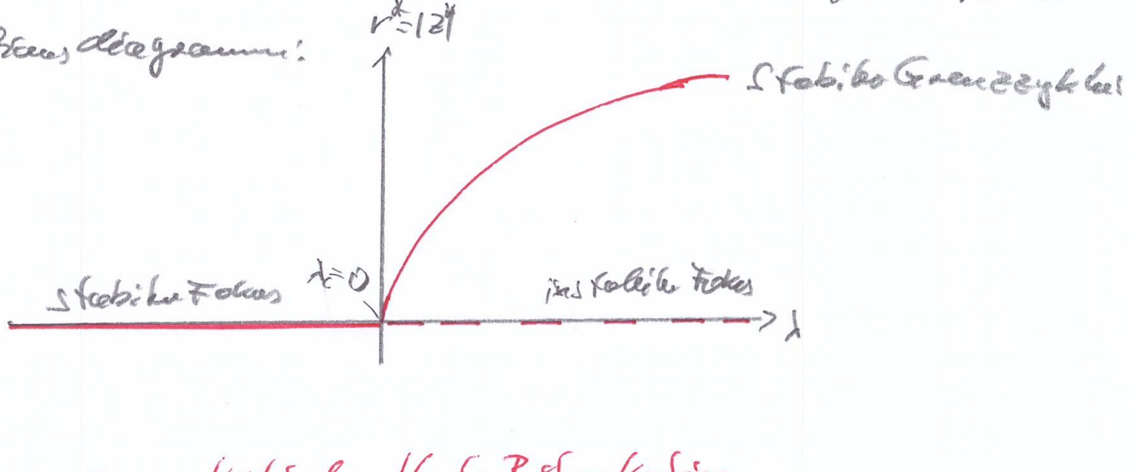
$\Rightarrow$ Eigenwerte von $\underline{A}$ (Floquet-Exponenten):

$$0 \overset{!}{=} (-2\lambda - \Lambda)(-\Lambda) = \Lambda^2 + 2\lambda\Lambda = \begin{cases} 0 \\ -2\lambda \end{cases}$$

Goldstone-Mode (Verschiebung entlang Orbit)

stabiler (transversaler) Floquet-Exponent

Bifurkationsdiagramm:



Superkritische Hopf-Bifurkation

Subkritische Hopf-Bifurkation:

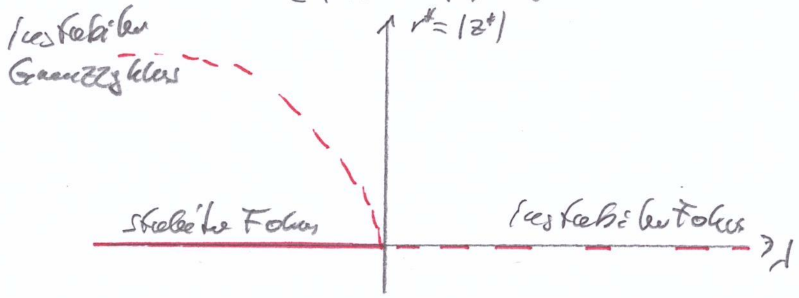
$$\dot z = \left(\lambda + i\omega + (1+i\gamma)|z|^2\right) z$$

$\Rightarrow$ FP: $x^* = y^* = 0 = z^*$ stabiler ($\lambda<0$) / instabiler ($\lambda>0$) Fokus

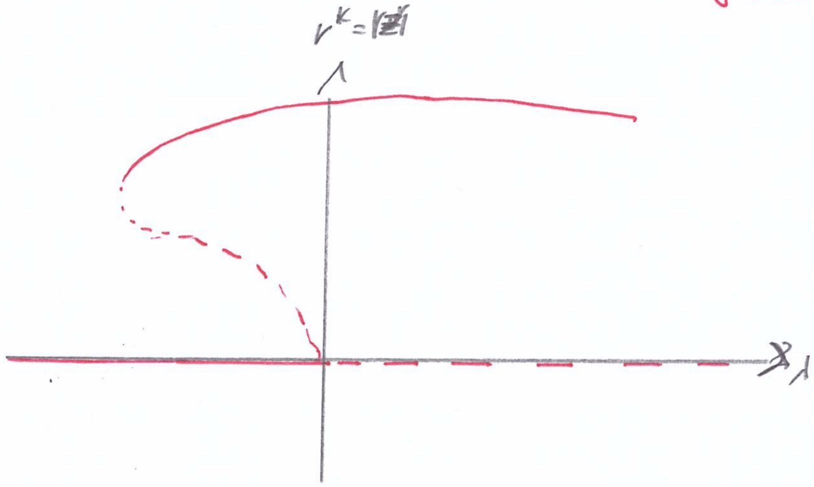
LC : $\dot r = (\lambda + r^2)\, r \;\Rightarrow\; (r^*)^2 = -\lambda \;\Rightarrow\; r^* = |z^*| = \sqrt{-\lambda}\,,\ \lambda<0$

(limit cycle) $\dot\varphi = \omega + \gamma r^2$

$$\Rightarrow\; z(t) = \sqrt{-\lambda}\; e^{i(\omega - \gamma\lambda)t}$$



häufig kombiniert mit einer Sattel-Knoten-Bifurkation eines Grenzzyklus



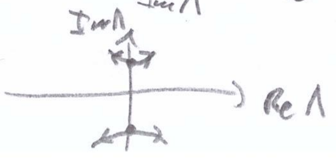
$$\dot r = \lambda r + r^3 - r^5$$
$$\dot\varphi = \omega + \gamma r^2$$

Merkmale einer Hopf-Bifurkation:

(i) Amplitude $\propto \sqrt{\lambda - \lambda_c}$

(ii) Periode : $T = \frac{2\pi}{\mathrm{Im}\,\Lambda} = \frac{2\pi}{\omega}$, Frequenz $\omega \neq 0$ (endlich!)

(iii) Eigenwerte:



Wechsel eines komplex konj. Paares in andere Halbebene, $\mathrm{Re}\,\Lambda \gtrless 0$

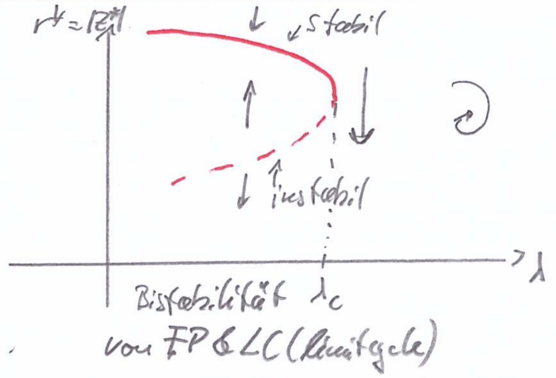
2.3 Lokale Bifurkationen von Grenzzyklen

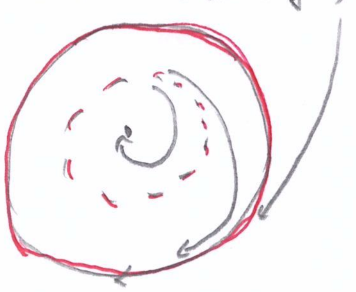
1. Sattel-Knoten-Bifurkation (eines Grenzzyklus)
2. Perioden-Verdopplung
3. sekundäre Hopf-Bifurkation (Sacker-Neimark)

Bisher: Fixpunkt verliert/ändert sich und ein Grenzzyklus wird geboren.

Jetzt: Grenzzyklus entsteht aus einem Grenzzyklus

2.3.1. Sattel-Knoten-Bifurkation (eines Grenzzyklus)





andere Namen:

- Kondensation von Pfaden
- fold bifurcation of limit cycles

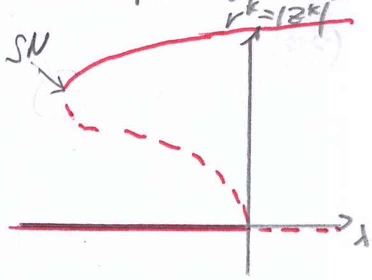
Merkmale:

- Amplitude bei $\lambda_c \neq 0$
- Frequenz bei $\lambda_c \neq 0$

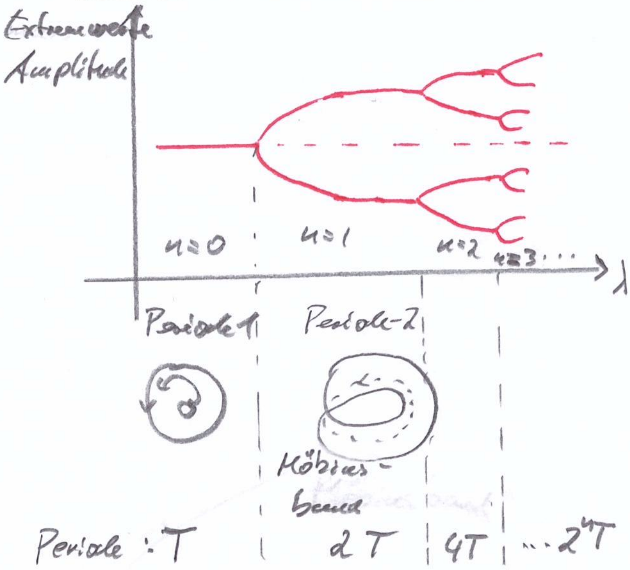
Bsp.: erweiterte subkritische Hopf-Bifurkation

$$\begin{cases} \dot r = \lambda r + r^3 - r^5 \\ \dot\varphi = \omega + \gamma r^2 \end{cases}$$

$$z(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)}$$



2.3.2 Perioden-Verdoppelung



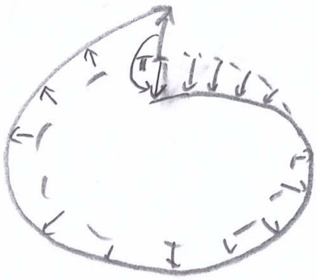
andere Namen:

- flip-Bifurkation
- Subharmonische Bifurkation

Merkmale:

- mindestens 3D Phasenraum
- Vorläufer von Chaos (→ Kap. 3)

→ phase flip von π nach einem Umlauf: Torsion benachbarter Trajektorien



Floquet-Exponent: $\Lambda = \lambda + i\omega$

am Bifurkationspunkt: $\lambda_c = 0 \Rightarrow \omega T = \pi$

$\Rightarrow$ Floquet-Multiplikator $\mu = e^{\Lambda T} = e^{i\pi} = -1$

häufig: Periodenverdoppelungskaskade ins Chaos (→ Feigenbaum-Szenario)

↳ unendlich viele, instabile periodische Orbits der Perioden $2^n T$ $(n=0,1,2,\ldots)$

2.3.3 Sekundäre Hopf-Bifurkation

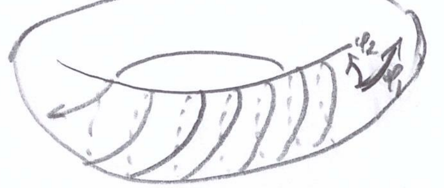
andere Namen:

- Neimark-Sacker-Bifurkation
- Torus-Bifurkation

Merkmale:

- inkommensurable Frequenzen: $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$ (irrational!)

  $\Rightarrow$ Trajektorie schließt sich nicht, sondern liegt dicht auf dem Torus



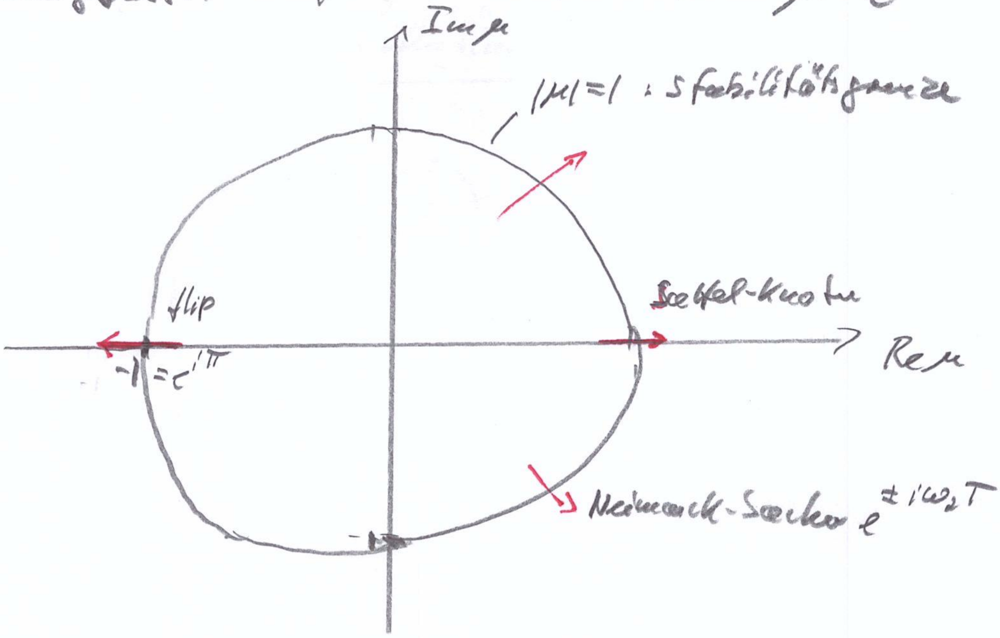
- Falls $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ geschlossener Orbit entlang Grenzzyklus

  $\rightarrow$ frequency locking, Modenkopplung

- ähnlich zur 1. Hopf-Bifurkation gibt es sub- und superkritische Fälle

subkritisch:

Zusammengefasst: Floquet-Multiplikatoren: $\mu = e^{\lambda T}$



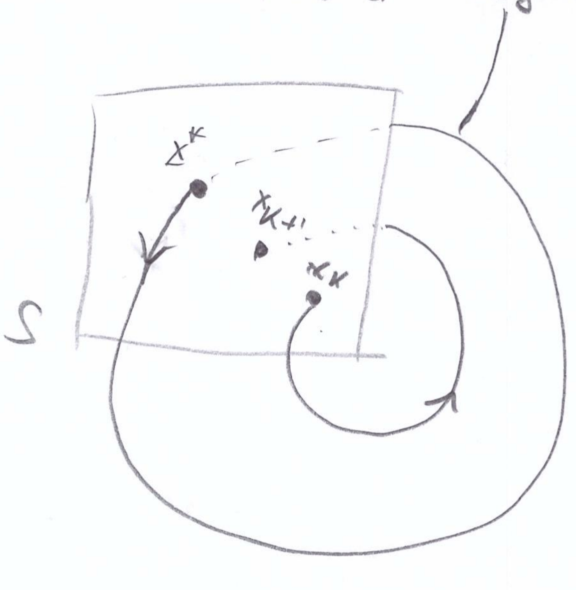
Poincaré-Abbildung (first-return map)

$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$ mit $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ und S ein $(n-1)$-dimensionaler Schnitt, durch den der Fluss von F hindurchfließt.

Die Poincaré-Abbildung P bildet S auf sich selbst und $x_k \in S$ ist der k-te Durchstoßpunkt: $\underline{x}_{k+1} = \underline{P}(\underline{x}_k)$ (diskrete Abbildung!)

Bsp.: (i) $\underline{F}$ hat einen Fixpunkt $\underline{x}^*$: $\underline{P}(\underline{x}^*) = \underline{x}^*$, falls $\underline{x}^*$ in S liegt.

(ii) $\underline{F}$ hat einen Grenzzyklus: Durchstoßpunkt $\underline{x}^* = \underline{P}(\underline{x}^*)$



2.4 Globale Bifurkationen von Grenzzyklen

Jetzt: globale + qualitative Änderung des Phasenportraits

Bsp: Sattel + instabiler Fokus ⟶ homokliner Orbit

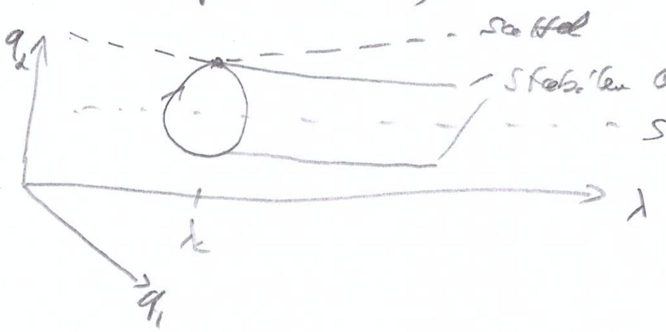
2.4.1 Homokline Bifurkationen (blue-sky catastrophe)

Sattel + Fokus ⟶ Sattel + homokliner Orbit ⟶ Sattel + Fokus + Grenzzyklus

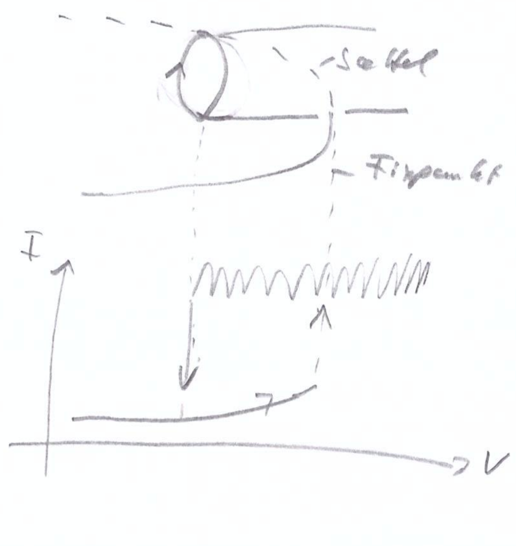
Idee: Sattelpunkt kollidiert mit Grenzzyklus

$\Rightarrow$ homokliner Orbit (saddle-to saddle loop)

Bifurkationsdiagramm (3D):

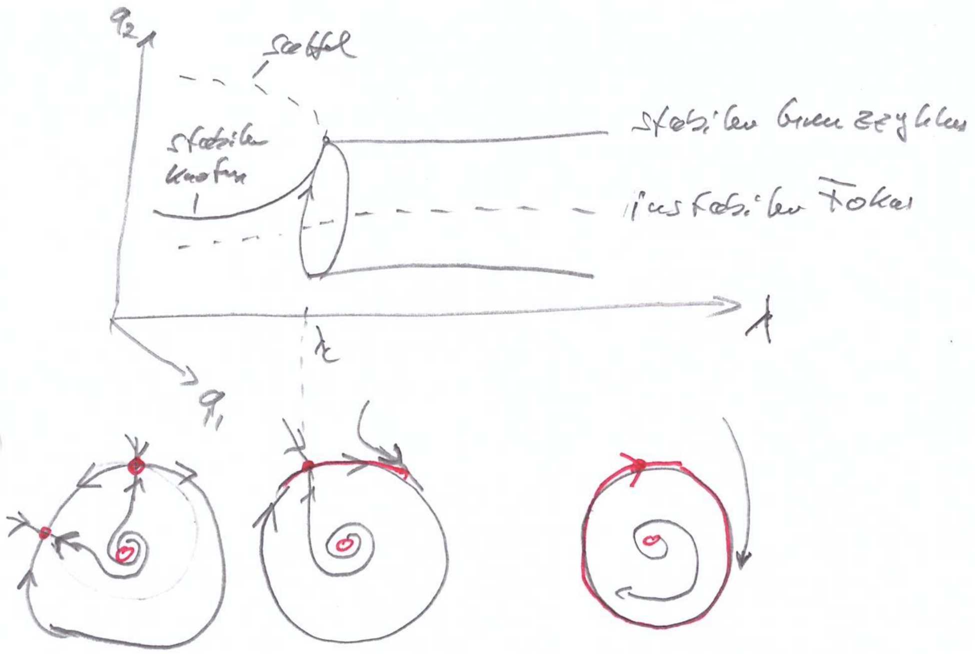


Bem: häufig kombiniert mit Bistabilität zwischen Oszillation und Fixpunkt:



2.4.2. Sattel-Knoten-Bifurkation auf einem Grenzzyklus

- Omega explosion
- saddle-node infinite period (SNIPER) bifurcation
- saddle-node on invariant cycle (SNIC) bifurcation



Idee: Sattel und Knoten kollidieren und einen Grenzzyklus entsteht

instabile Mannigfaltigkeit des Sattel $\hat{=}$ stabile Mannigfaltigkeit des Knotens

Kennzeichen: Amplitude bei $\lambda_c \neq 0$

Frequenz bei $\lambda_c \to 0$ (Periode $\to \infty$)

Einfaches generisches Modell einer SNIPER-Bifurkation

Ditzinger, Ning, Hu, Phys. Rev. E $\underline{50}$, 3508 (1994)

Hu, Ditzinger, Haken, Phys. Rev. Lett. $\underline{71}$, 87 (1993)

Beweglichkeit: Typ I (Typ II: Hopf-Bifurkation)

Normalform / einfache Gleichungen:

$$\dot{x} = x(1-x^2-y^2) + y(x-b)$$

$$\dot{y} = y(1-x^2-y^2) - x(x-b)$$

in Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\mathrm{I}: \quad \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = r\cos\varphi\left(1-r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\right) + r\sin\varphi(r\cos\varphi - b)$$

$$\mathrm{II}: \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = r\sin\varphi\left(1-r^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1}\right) - r\cos\varphi(r\cos\varphi - b)$$

$$\mathrm{I}' = \mathrm{I}\cdot\cos\varphi: \quad \dot{r}\cos^2\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi = r\cos^2\varphi(1-r^2) + r\sin\varphi\cos\varphi(r\cos\varphi - b)$$

$$\mathrm{II}' = \mathrm{II}\cdot\sin\varphi: \quad \dot{r}\sin^2\varphi + r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi = r\sin^2\varphi(1-r^2) - r\cos\varphi\sin\varphi(r\cos\varphi - b)$$

$$\mathrm{I}'+\mathrm{II}': \quad \dot{r}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)(1-r^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\dot{r} = r(1-r^2)}$$

$$\mathrm{I}'' = \mathrm{I}\cdot\sin\varphi: \quad \dot{r}\cos\varphi\sin\varphi - r\dot{\varphi}\sin^2\varphi = r\cos\varphi\sin\varphi(1-r^2) + r\sin^2\varphi(r\cos\varphi - b)$$

$$\mathrm{II}'' = \mathrm{II}\cdot\cos\varphi: \quad \dot{r}\sin\varphi\cos\varphi + r\dot{\varphi}\cos^2\varphi = r\sin\varphi\cos\varphi(1-r^2) - r\cos^2\varphi(r\cos\varphi - b)$$

$$\mathrm{II}''-\mathrm{I}'': \quad r\dot{\varphi}\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1} = -r\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1}(r\cos\varphi - b)$$

$$\overset{r\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \boxed{\dot{\varphi} = b - r\cos\varphi}$$

lineare Stabilitätsanalyse:

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{r} \\ \delta\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3r^2 & 0 \\ -\cos\varphi & +r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Fixpunkte: $r^* = 0$: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mathrm{tr}\,\underline{A} = 1 \\ \det\underline{A} = 0 \end{matrix}$

Achtung: Phase φ bei $r=0$ nicht definiert:

$\Rightarrow$ effektiv 1D: $\dot{r} = r(1-r^2) \Rightarrow \delta\dot{r} = (1-3r^2)|_{r^*}\,\delta r$

mit $r^* = 0$: $(1-3r^2)|_{r^*} = 1 > 0 \Rightarrow$ instabil

$r^* = 1$: $\quad \dot r = 0$

$\dot\varphi = b - \cos\varphi \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \varphi = \arccos b \quad (|b| < 1)$

$\cos\varphi^* = b \Rightarrow \cos^2\varphi^* = 1 - \sin^2\varphi^* = b^2$

$\Rightarrow \sin\varphi^* = \pm\sqrt{1-b^2}$

FP in (x,y)-Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= r^*\cos\varphi^* = b \\ y^* &= r^*\sin\varphi^* = \pm\sqrt{1-b^2} \end{aligned}\right\}$$

existiert für $|b| < 1$

bei $b = 1$: Entstehung eines Grenzzyklus $y^* = 0$

Periode: aus $\dot\varphi$ mit Trennung der Variablen:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{b - \cos\varphi}\, d\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2 - 1}} \quad \text{für } b > 1$$

$$\lim_{|b| \to 1} T = \infty$$

Stabilität von

(i) $(x^*, y^*) = (b, +\sqrt{1-b^2})$: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -b & \sqrt{1-b^2} \end{pmatrix}$

$\operatorname{tr}\underline{\underline{A}} = -2 + \sqrt{1-b^2} < 0 \Rightarrow$ Sattel: $\lambda = \begin{cases} -2 \\ \sqrt{1-b^2} \end{cases}$

$(\det\underline{\underline{A}} = -2\sqrt{1-b^2} < 0)$

(ii) $(x^*, y^*) = (b, -\sqrt{1-b^2})$: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -b & -\sqrt{1-b^2} \end{pmatrix}$

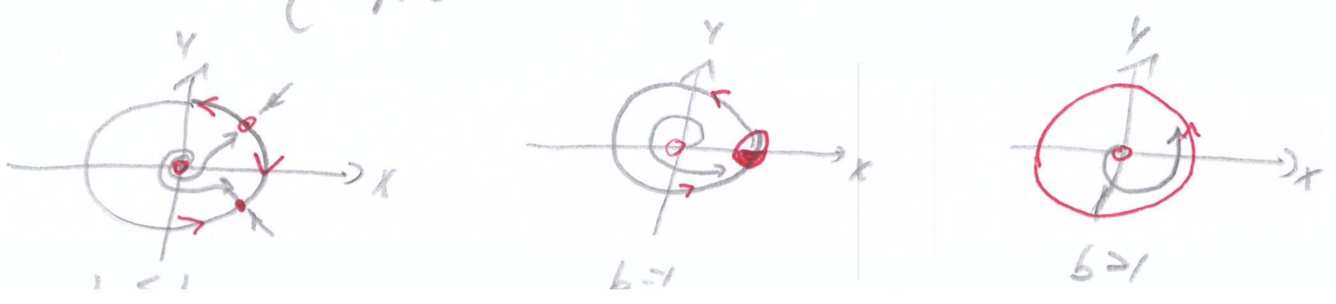
$\operatorname{tr}\underline{\underline{A}} = -2 - \sqrt{1-b^2} < 0$

$\det\underline{\underline{A}} = +2\sqrt{1-b^2}$

$(\operatorname{tr}\underline{\underline{A}})^2 - 4\det\underline{\underline{A}} = 4 + 4\sqrt{1-b^2} + (1-b^2) - 8\sqrt{1-b^2} = 4 - 4\sqrt{1-b^2} + (1-b^2) > 0$

$\Rightarrow$ Stabiler Knoten

$$\lambda = \begin{cases} -2 \\ -\sqrt{1-b^2} \end{cases}$$



2.5 Bifurkation von räumlichen Mustern

(s.a. Kapitel 4)

Idee: dynamische Variable hängt von x und t ab

$$\underset{\text{Raum}}{x} \qquad \underset{\text{Zeit}}{t}$$

etwa: $$\frac{\partial}{\partial t}\underline{q}(x,t) = \underline{F}(\underline{q}, \underset{\text{Bif. parameter}}{\mu}) + \underset{\text{Diffusionskonstante}}{D} \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x,t)$$ (Reaktionsdiffusionsgleichung)

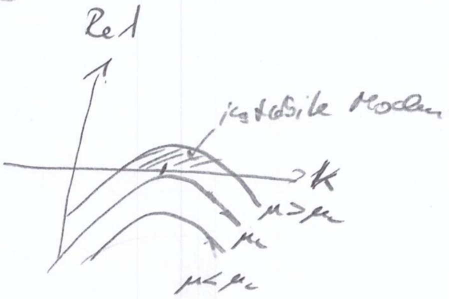
lineare Stabilitätsanalyse $\delta \underline{q} \sim e^{\lambda t} e^{i\underline{k}x}$

$\underline{k}$: Wellenzahl, Wellenvektor

$$\underline{\underline{A}}_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j}\Big|_{q^*} - D_{ij} k^2$$

$\Rightarrow$ Dispersionsrelation $\lambda(k)$ (auch $\lambda(\underline{k})$ in 2D/3D Raum)

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\lambda(k) \begin{cases} <0 & \text{stabil} \\ >0 & \text{instabil} \\ =0 & \text{Bifurkation v. räumlich-periodischen Lösungen mit Wellenvektor } \underline{k} \end{cases}$$



2.5.1 Turing-Instabilität

2.5.2 stehende/laufende Wellen

2.5.3 Hopf-Bifurkation

2.5.1 Turing-Instabilität

$\lambda(k) = 0$ (kein Imaginärteil!)

bei $|\underline{k}| = k_c \neq 0$

Beobachtg: Stationäre, räumlich periodische Struktur mit Wellenzahl k_c bifurkiert

$$\boxed{\lambda(k) = \epsilon - b\,(k^2 - k_c^2)^2} \quad \text{und} \quad \epsilon = \frac{\mu - \mu_c}{\mu_c}$$

Bsp.: langsam diffundierender Aktivator + schneller Inhibitor

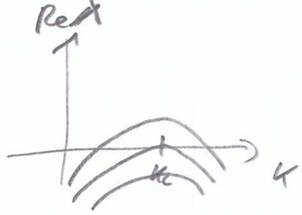
2.5.2 stehende / laufende Wellen

$\lambda(k) = \pm i\omega$ bei $|\underline{k}| = k_c \neq 0$

Beobachtung: oszillierende, räumlich periodische Strukturen werden zu Wellen $\delta q \sim e^{i(kx \pm \omega t)}$

$$\boxed{\lambda(k) = \epsilon - b\,(k^2 - k_c^2)^2 \pm i\omega}$$

Re λ vs. k wie dann bei 2.5.1

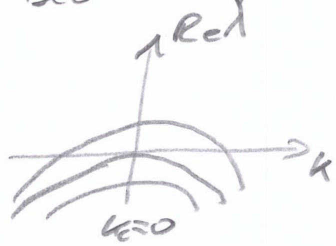


2.5.3 Hopf-Bifurkation

$\lambda(k) = \pm i\omega$ bei $|\underline{k}| = k_c = 0$

$\lambda(k) = \epsilon - b\,(k^2)^2 \pm i\omega$

Beobachtung: räumlich homogener Grenzzyklus



mehr dazu in Kapitel 4

3. Deterministisches Chaos

Deterministische, aber ungeordnete Bewegung im Langzeitverhalten von Systemen mit $N \geq 3$ (autonom):

· Seltsamer (chaotischer) Attraktor

3.1 Klassifikationskriterien

3.2 Definitionen

3.3 Seltsame Attraktoren

3.1 Klassifikationskriterien

Kriterien	quasiperiodisches Verhalten	deterministisches Chaos	stochastisches System (Rauschen)
Freiheitsgrade	wenige dynamische Freiheitsgrade, niedrig-dimensionale Phasenraum		viele mikroskopische Freiheitsgrade $f \sim 10^{24}$
Attraktor	Torus T^d mit $d = 2, 3, \ldots$	seltsamer Attraktor mit fraktaler Dimension	stochastisches Ensemble
Autokorrelationsfunktion $\langle x(t)\, x(t+\tau)\rangle = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\, x(t+\tau)\, dt$	periodisch in τ	$\langle x(t)\, x(t+\tau)\rangle \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0$	$\langle x(t)\, x(t+\tau)\rangle = 0$ für $\tau \gg \tau_c$ (Korrelationszeit)
Fourierspektrum (spektrale Leistungsdichte, power spectrum) $S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)\, x(t+\tau)\rangle e^{i\omega\tau}\, d\tau$	diskrete Frequenzen $\omega_1, \omega_2, \ldots$	breites Frequenzband	
Sonstiges		i) Sensibilität gegenüber kleinen Störungen in den Anfangsbedingungen ii) typische, universelle Bifurkationsszenarien	

3.2 Definition

Def.: Eine Bewegung heißt chaotisch, wenn sie empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt.

=> qualitative Aussagen

Jetzt: quantitative Formulierung der Stabilität gegenüber kleinen Veränderungen an den Anfangsbedingungen

Bahnstabilität (orbital stability):

bahnstabil
alle benachbarten Bahnen bleiben in einer ε-Röhre um $\phi(t, x_0)$

asymptotisch bahnstabil
Abstand $\varepsilon \to 0$ für $t \to \infty$

Ljapunov asymptotisch stabil
$|\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \xrightarrow{t\to\infty} 0$
dasselbe t!

Linearisierung in der Nähe der Lösungskurve $\phi(t, x_0)$:

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(\underline{x}(t), t)}_{A_{ik}(t)} \delta x_k$$

$A_{ik}(t)$ mit Eigenwerten $\lambda_j(t)$ & Eigenvektoren $\underline{\xi}^{(j)}(t)$

formale Lösung: $\delta \underline{x}(t) = e^{\int_0^t dt' \underline{A}(t')} \delta \underline{x}(0)$

Zeitentwicklung einer infinitesimalen Kugel um $\underline{x}_0$:

n-dim. Ellipsoid mit Hauptachsen $p_j(t) \sim p_j(0)\, e^{\bar{\lambda}_j t}$

Def.: Stabilität ist bestimmt durch die Ljapunov-Exponenten

$$\bar{\lambda}_j := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_k(t)}{p_k(0)} .$$

Bem.: Führender (größter) Ljapunov-Exponent:

$$\lambda := \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |\underline{x}(t) - \underline{y}(t)|$$

$$\Rightarrow |\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \sim e^{\lambda t}$$

$\lambda < 0$ kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen exponentiell gedämpft

$\lambda > 0$ exponentielles Auseinanderlaufen benachbarter Bahnen

3.3 Seltsame Attraktoren

chaotischer Attraktor im $\mathbb{R}^3$: $\underbrace{\bar{\lambda}_1 > 0}_{\text{instabile Bewegung auf Attraktor}}$, $\bar{\lambda}_2 = 0$, $\bar{\lambda}_3 < 0$ Annäherung an den Attraktor

Merkmale: • Untermenge des $\mathbb{R}^n$

($\dot{x} = F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$) • Trajektorien liegen dicht beieinander: Zwischen 2 Trajektorien liegt (paarweise) immer noch eine 3.

- Kleine Abweichungen verstärken sich exponentiell.
- auf lange Sicht / für lange Zeiten kommen sich 2 Trajektorien beliebig nahe.
- Dimension nicht ganzzahlig: fraktale Dimension

quantitative Formulierung der fraktalen Dimension:

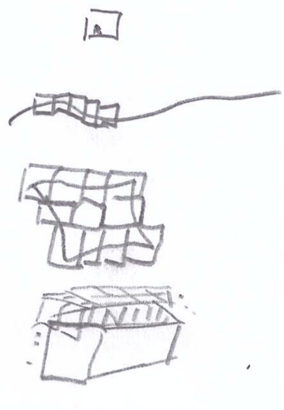
Def: Sei $N(\varepsilon)$ die Mindestzahl von n-dimensionalen Würfeln mit Seitenlänge ε, um eine (Punkt-)Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ zu überdecken.

Dann heißt $$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

die fraktale (Hausdorff-) Dimension. (box-counting dimension)

Bem.: aus $d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}$ folgt: $N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^d}$

Bsp.:
- Punkt: $N(\varepsilon) = \text{const}$
- Linie: $N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon}$
- Fläche: $N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$
- Volumen: $N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^3}$



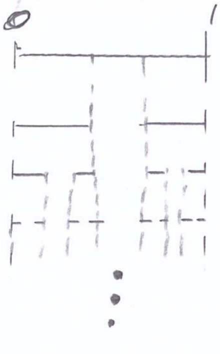
- Chaotischer Attraktor in $\mathbb{R}^3$:

  Beobachtung: Volumen $V \to 0 \Rightarrow d<3$, aber häufig $d>2$

  ↳ Lorenz-Modell

  Rössler-Modell

- Cantor-Menge (selbstähnliche Struktur, Cantor set)



ε	$N(\varepsilon)$
1	1
$\frac{1}{3}$	2
$\frac{1}{9}$	4
$\frac{1}{27}$	8
$\vdots$	
$\frac{1}{3^k}$	2^k

Dimension (fraktal):

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{k \to \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6$$

Zwischen Punkt und Linie

- Koch-Kurve (Koch snowflake)

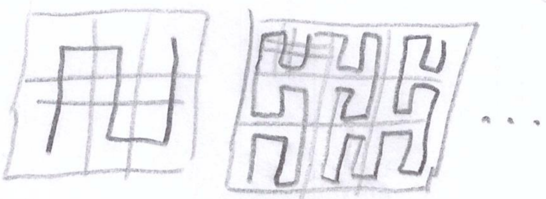
ε	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{3^k}$
N	1	4	16		4^k

$$d = \lim_{k \to \infty} \frac{\ln 4^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26$$

Zwischen Linie und Fläche

- aus der Natur: Meeresküste

- Achtung: Peano-Kurve (raumfüllende Kurve)



FASS: space-filling, self-avoiding, simple, self-similar

Bsp.: - Lorenz-Modell:

$$\dot{x} = a y - a x$$
$$\dot{y} = b x - x z - y$$
$$\dot{z} = x y - c z$$

typische Parameter für Chaos:

$a = 10,\ b = 28,\ c = \frac{8}{3}$

Merkmale: "double scroll"

- Rössler-Attraktor

$$\dot{x} = -y - z$$
$$\dot{y} = x + a y$$
$$\dot{z} = b + x z - c z$$

typische Parameter für Chaos:

$a = 0.2,\ b = 0.2,\ c = 5.7$

Fixed points:

$$x^*_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}$$

$$y^*_{1,2} = -z^*_{1,2} = \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$$

$\dot{x} = 0 \Rightarrow y^* = -z^*$

$\dot{y} = 0 \Rightarrow x^* = -a y^* = +a z^*$

$\dot{z} = 0 \Rightarrow 0 = b + a z^{*2} - c z^* \Rightarrow z^{*2} - \frac{c}{a} z^* + \frac{b}{a} = 0$

$$\Rightarrow z^* = +\frac{1}{2}\frac{c}{a} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4a^2} + \frac{b}{a}} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ba}}{2a}$$

$$\Rightarrow y^* = -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}$$

Jacobi-Matrix:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z^* & 0 & x^* - c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Polynom 3. Ordg für Eigenwerte:

$$-\lambda^3 + \lambda^2 (a + x - c) - \lambda (ac - ax - 1 - z) + x - c + az = 0$$

Eigenwerte:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &\approx 0.097103 + i\, 0.995786 \\ \lambda_2 &\approx 0.097103 - i\, 0.995786 \\ \lambda_3 &\approx -5.68718 \end{aligned}\right\}$$ FP: nahe Ursprung

$\Rightarrow$ Interpretation?

2. FP: $\lambda_1 \approx -0.000046 + i\, 5.42859$

$\lambda_2 \approx -0.000046 - i\, 5.42859$

$\lambda_3 \approx$ [illegible]

3.4 Chaos-Kontrolle

Kriterien für Chaos:

- sensitive Abhängigkeit gegenüber Anfangsbedingungen
- lokale Instabilität (positive Ljapunov-Exponenten) bei gleichzeitiger globaler Begrenztheit (seltsamer Attraktor)
- Nichtlinearitäten (lineare Systeme mit lokaler Instabilität sind nicht begrenzt)
- minimale Dimension = 3 (cf. Überschneidungen von Trajektorien im 2D-System verboten)
- wiederkehrende Trajektorien

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ T_\varepsilon > 0 : \forall t \geq 0 \ \exists \ T(t,\varepsilon):$$

$$0 < T(t,\varepsilon) < T_\varepsilon \ \wedge \ |\underline{x}(t+T(t,\varepsilon)) - \underline{x}(t)| < \varepsilon.$$

(lokal instabile Trajektorien kommen sich auf lange Zeiten beliebig nah.)

$\Rightarrow$ Ansatzpunkt für Kontrollmethoden an chaotischen Systemen:

(i) kleine Änderung (Kontrolleingriff) $\Rightarrow$ große Wirkung (Veränderung der Stabilität)

(ii) Wenn die Trajektorie jedem Punkt des Attraktors beliebig nah kommt, braucht man nur Geduld, um automatisch / von selbst in die Nähe des Zielzustands zu landen und diesen dann mit kleinen Kontrolleingriffen zu erreichen.

3.4.1 OGY-Kontrolle

3.4.2 Zeitverzögerte Rückkopplung

3.4.1 OGY-Kontrolle

OGY steht für Edward Ott, Celso Grebogi, James Yorke } damals (1990) University of Maryland

→ OGY: Controlling Chaos, Phys. Rev. Lett. 64, 1196 (1990)

Was soll kontrolliert/stabilisiert werden?

↳ Chaotischer Attraktor enthält ∞ viele periodische Orbits

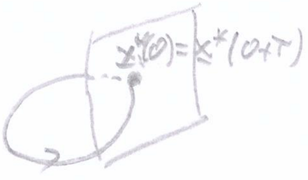
↳ Ziel: Stabilisierung eines instabilen periodischen Orbits

Idee: (i) Überführung von $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, \underline{u})$ mit Kontrollsignal $\underline{u}$ in eine diskrete Abbildung mittels Poincaré-Schnitten.

(ii) Kontrolle wirkt nur dann, wenn die Trajektorie in der Nähe des Zielzustands ist.

Poincaré-Schnitt: Definiere Fläche $S = \{\underline{x} : S(\underline{x}) = 0\}$ mit $\underline{x}^*(0) \in S$ (periodischer Orbit) und $S(\underline{x})$ so definiert, dass S senkrecht zu $\underline{x}^*(t)$ ist.

Bsp: Periode 1:



Periode 2

Poincaré-Abbildung: $\underline{x} \to \underline{P}(\underline{x}, \underline{u})$ mit $\underline{P}(\underline{x}, \underline{u})$ als 1. Wiederkehrpunkt auf Fläche S (Durchstoßpunkt)

⇒ Folge von Punkten $\underline{x}_{n+1} = \underline{P}(\underline{x}_n, \underline{u})$ mit $\underline{x}_k = \underline{x}(t_k)$ mit t_k Zeit des k-ten Durchstoßpunktes von S und $\underline{u}_k = \underline{u}(t)$ konstant für $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

Damit kann man die Dgl. $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, \underline{u})$ durch eine diskrete Abbildung ersetzen: $\tilde{\underline{x}}_{k+1} = \underline{P}(\tilde{\underline{x}}_k, \underline{u}_k)$ mit $\tilde{\underline{x}}_k = \underline{x}_k - \underline{x}^*$

(Abweichung vom Zieldurchstoßpunkt

OGY-Kontrolle mittels: $\underline{u}_k = \begin{cases} c\,\bar{x}_k, & \text{wenn } |\bar{x}_k| < \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

⇒ Ein Kontrollsignal wird gesendet, wenn Trajektorie in der Nähe von $\underline{x}^*$ ist.

Nachteile:
- evtl. Wartezeiten
- Kenntnis von $\underline{x}^*$ nötig
- häufig keine vollständige Kenntnis des Systems möglich (Poincaré-Schnitt ggf. unmöglich)

3.4.2. Zeitverzögerte Rückkopplung

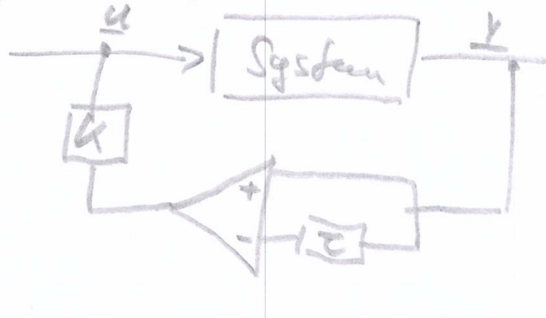
Referenz: Kestutis Pyragas: Continuous control of chaos by self-controlling feedback, Phys. Lett A 170, 421 (1992)

Idee: Verwende statt Zielzustand $\underline{x}^*$ eine zeitverzögerte Version des Outputs/Ausgangs: $\underline{y}(t)$: $\underline{y}(t-\tau)$.

⇒ Pyragas-Kontrolle (time-delayed feedback): $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}) + \underline{\underline{K}}\,\overbrace{[\underline{y}(t) - \underline{y}(t-\tau)]}^{\underline{u}(t)}$

$= \underline{g}(\underline{x}(t))$, etwa $\underline{y}(t) = \underline{x}(t)$

Schema:



closed loop

(Selbst-) Regelung

(vgl. open loop = Steuerung)

Vorteil:
- Keine Kenntnis des Zielzustands nötig
- Nichtinvasiv: verschwindende Kontrolle bei erfolgreicher Stabilisierung

Bsp.: (i) Stabilisierung eines instabilen periodischen Orbits mit Periode T:

↳ Wahl von $\tau = T$: $\underline{x}(t) = \underline{x}(t-\tau)$ und somit verschwindendes Kontrollsignal $\underline{u}(t)$.

(ii) Stabilisierung von Fixpunkten (Fokus) 

↳ Zeitskala: $\frac{2\pi}{\mathrm{Im}(\lambda)}$

Kontrollparameter: τ: Zeitverzögerung

$\underline{\underline{K}}$: Rückkopplungsmatrix

häufig: $\underline{\underline{K}} = \underbrace{K}_{\text{Skalar}} \underbrace{\mathbb{1}}_{\text{Einheitsmatrix}}$

Bsp.: Rössler-System: chaotisch für $a = 0.2 = b$, $c = 6.5$ (aus S. 7

$$\dot{x}(t) = -y(t) - z(t) \qquad - K\left[x(t) - x(t-\tau)\right]$$
$$\dot{y}(t) = x(t) + a\,y(t)$$
$$\dot{z}(t) = b + z(t)\left[x(t) - c\right]$$

- Periode-1-Orbit: $T_1 = 5.91679\ldots$
- Periode-2-Orbit: $T_2 = 11{,}82814\ldots$

Stabilisierung von Periode-1-Orbit für $0.24 < K < 2.3$

Referenz: A. Balanov, N. Janson, E. Schöll, PhysRevE $\underline{71}$, 016222 (2005)

4. Strukturbildung & Muster

4.1 Einführung

4.2 komplexe Ginzburg-Landau Gleichung

4.3 Bifurkationen räumlicher Muster

4.4 Reaktionsdiffusionssysteme

4.1 Einführung

Muster (patterns) findet man überall

Bsp.:
- Vegetationsdynamik
- Vogelschwärme / Insekten
- Fischschulen
- Anregungswellen
- Physarum polycephalum Zelle
- Ladungsfronten
- Konvektionsmuster
- Rayleigh-Bénard-Zellen
- Taylor-Couette-Strömung
- Marangoni-Effekt

1) Was meint Chat GPT dazu?

2) a) Sucht selbst ein Thema / Bereich und kombiniert die Frage mit "pattern formation".

b) kurz zusammenfassen (wesentliche Punkte, Begriffe, Abbildungen)

Vergleiche: Meixner et al. PRE 55, 6690 (1997)

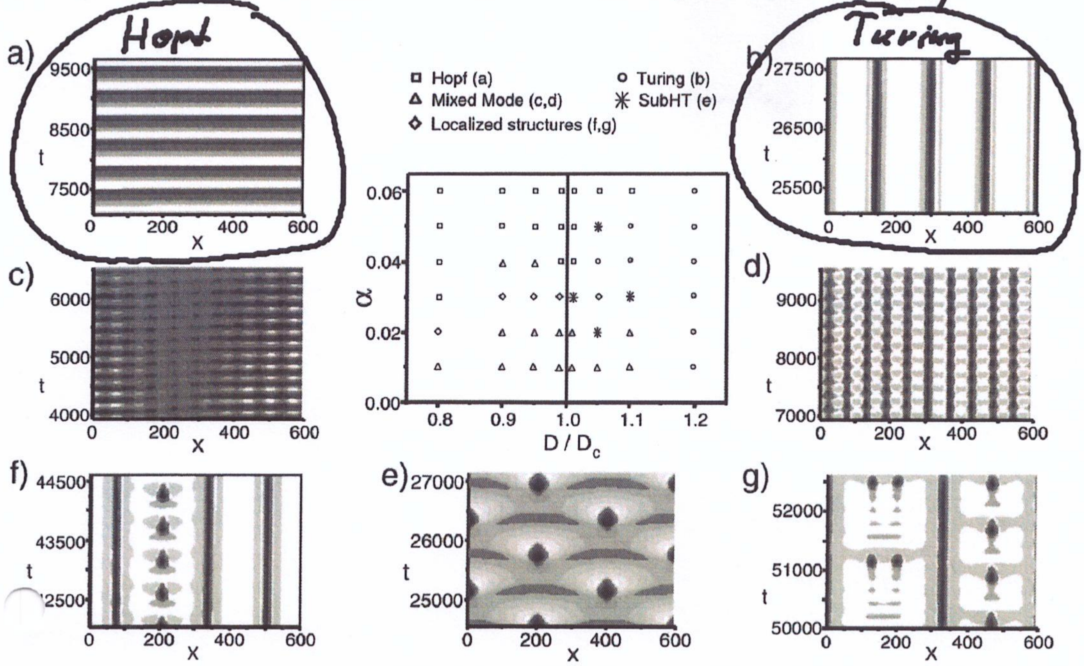


FIG. 5. Regimes of different asymptotic spatiotemporal behavior near the CTHP bifurcation given by the line $D/D_c=1$. The symbols in the $(\alpha, D/D_c)$ control parameter space denote various types of space-time patterns which are illustrated by typical space-time plots of $j(x,t)$ as insets: (a) Hopf oscillations (squares), (b) Turing patterns (dots), (c) and (d) Turing-Hopf mixed modes (triangles), (e) subharmonic Turing-Hopf mode consisting of spatiotemporal spiking (asterisks), and (f) and (g) localized Turing-Hopf structures (diamonds). (For parameters, see Table I.)

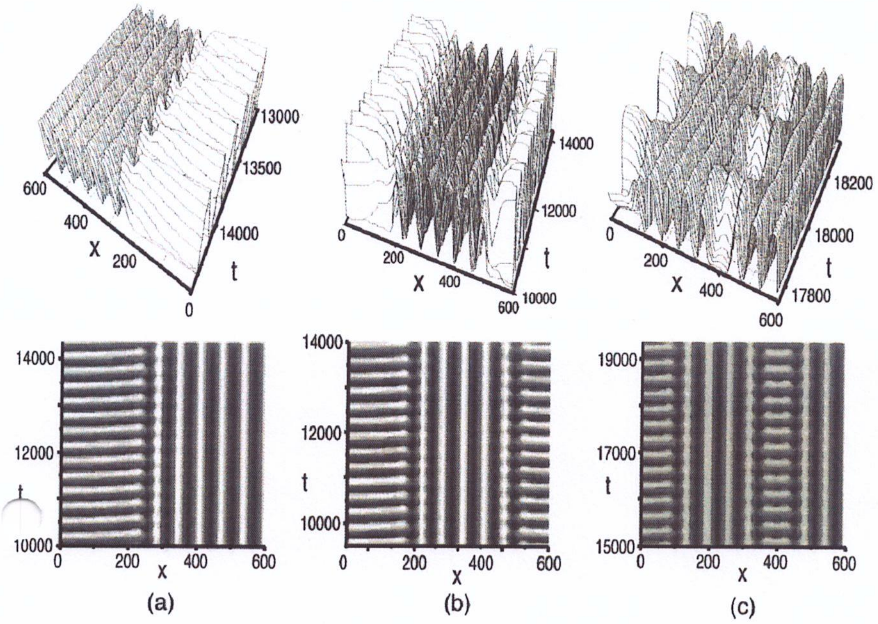


FIG. 6. Localized structures near the CTHP C_2 for $T=0.05$, $\alpha=0.02$, $D=8$ (corresponding to $D/D_c=0.67$), $j_0=3.1$, and different initial conditions: (a) Turing-Hopf front. (b) Turing domain embedded between two Hopf states. (c) Localized Turing-Hopf structures. The current density $j(x,t)$ is shown as a density plot and as a three-dimensional representation.

4.2 Komplex Ginzburg-Landau Gleichg

- Stuart-Landau-Oszillator (Hopf-Normalform)

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega \mp (1+i\gamma)|z|^2)\, z \qquad w(x,t)$$

- harmonischer Oszillator mit Diffusion: $\dfrac{\partial W}{\partial t} = i\omega_0 W + \underset{\uparrow\, d_r + i d_i}{D} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} W$

Ansatz: $W(x,t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} W_n(t) \exp\left[i \dfrac{2\pi n x}{L}\right]$ (Fourier-Reihe)

$\dfrac{2\pi n}{L}$: Wellenzahl

$\Rightarrow$ Amplitude der n-ten Mode:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_n(t) = i\omega_0 W_n(t) - \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 D\, W_n(t)$$

Lösung: $W_n(t) = W_n(0) \underbrace{\exp\left[-\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 d_r t\right]}_{\text{Dämpfung aller Moden } n \neq 0} \exp\Big[i \underbrace{\left(\omega_0 - \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 d_i\right)}_{\omega_n} t\Big]$

$\Rightarrow$ nur homogene Mode $(n=0)$ überlebt

- Stuart-Landau + Diffusion:

$$\partial_t W = \mu(\sigma_1 + i\omega_1) W \underbrace{- (g_r + i g_i)|W|^2 W}_{\text{vernachlässigbar für klein } |W|\text{: Amplituden}} + (d_r + i d_i)\, \partial_x^2 W$$

$\Rightarrow$ Lösg: $W_n(t) = W_n(0) \exp\left[\left(\mu\sigma_1 - \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 d_r\right) t\right] \exp\left[i \omega_n t\right]$

$\omega_n = \omega_1 - \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 d_i$

Achtg! Entdämpfg für $\mu\sigma_1 - \left(\dfrac{2\pi n}{L}\right)^2 d_r > 0$

etwa L groß genug $\Rightarrow$ instabile Moden!

Transformiere: $t \to \dfrac{t}{\mu\sigma_1}$, $x \to \left(\dfrac{d_r}{\mu\sigma_1}\right)^{\frac{1}{2}} x$

$W \to \left(\dfrac{\mu\sigma_1}{g_r}\right)^{1/2} \exp\left(i\,\omega_1 t/\sigma_1\right) W$, $\quad c_1 = \dfrac{d_i}{d_r}$, $\quad c_2 = \dfrac{g_i}{g_r}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} W = W - (1+ic_2)|W|^2 W + (1+ic_1)\frac{\partial^2}{\partial x^2} W}$$

Komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung

Lösg: $W_Q = a_Q \exp[i(\omega_Q t + Qx)]$ $\quad$ Q: Wellenzahl

$$\Rightarrow i\omega_Q W = W - (1+ic_2)|a_Q|^2 W + (1+ic_1)(-Q^2) W$$

Re: $0 = 1 - |a_Q|^2 - Q^2 \Rightarrow |a_Q^2| = 1 - Q^2$

Im: $\omega_Q = -c_2|a_Q|^2 - c_1 Q^2$

$$= -c_2(1-Q^2) - c_1 Q^2$$

$$= -c_2 + (c_2 - c_1) Q^2$$

Uniform/homogen Oszillatorzustand $(Q=0)$: $|a_0| = 1$, $\omega_0 = -c_2$

Check Stabilität: kleine Störg: $W \approx [1 + w(x,t)]\exp(i\omega_0 t)$

$$\partial_t w = -(1+ic_2)(w+w^*) + (1+ic_1)\partial_x^2 w$$

$\Rightarrow$

$\uparrow$ linearer Ordng

$$\partial_t w_q = -(1+ic_2)(w_q + w_q^*) + (1+ic_1) q^2 w_q \quad \text{mit } q = \frac{2\pi n}{L}$$

$$\partial_t w_q^* = -(1-ic_2)(w_q + w_q^*) + (1-ic_1) q^2 w_q^*$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} w_q \\ w_q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+ic_2) - (1+ic_1)q^2 & -(1+ic_2) \\ -(1-ic_2) & -(1-ic_2) - (1-ic_1)q^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_q \\ w_q^* \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Eigenwerte: } \lambda_\pm^{(q)} = -(1+q^2)\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{q^2[(1+c_1^2)q^2 + 2(1+c_1c_2)]}{(1+q^2)}}\right\}$$

Instabilität für $\boxed{1 + c_1 c_2 < 0}$ Benjamin-Feir-Linie

Band von instabilen Moden: $0 < |q| < \sqrt{\frac{2|1+c_1c_2|}{1+c_1^2}}$

- Hinweise/Tipps zur Nachbereitung/Vorbereitung:
  - ↳ Benjamin-Feir-Instabilität
  - ↳ Amplituden-/Phasen-Gleichung
  - ↳ Muster in der CGLE
  - ↳ mitrotierendes Bezugssystem
  - ↳ Transformation $\underline{x} \longrightarrow \underline{x} - \underline{v}t$
  - ↳ Eigenwerte nachvollziehen

4.2 Komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung (continued)

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x,t) = W(x,t) - (1+iC_2)\,|W(x,t)|^2\, W(x,t) + (1+iC_1)\frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,t)$$

$W \in \mathbb{C}$ mit zeitlicher und räumlicher Abhängigkeit

Lösungsansatz (ebene Wellen) $W_Q(x,t) = a_Q \exp[i(\omega_Q t + Qx)]$

mit Wellenzahl Q

$\Rightarrow |a_Q|^2 = 1 - Q^2$ und $\omega_Q = -C_2 + (C_2 - C_1) Q^2$

Spezialfall: uniform/homogene Oszillation ($Q=0$): $|a_Q| = 1$, $\omega_0 = -C_2$

Instabilität für $1 + C_1 C_2 < 0$ Benjamin-Feir-Linie

Band von stabilen Moden: $0 < |Q| < \sqrt{\frac{2|1+C_1C_2|}{1+C_1^2}}$

Reelle Ginzburg-Landau-Gleichung: $\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + W - |W|^2 W$
($C_1 = 0 = C_2$)

Spieglsymmetrie: $W(x,t) = W(-x,t)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \mapsto \frac{\partial}{\partial(-x)} = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \longleftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

oder auch $W(x,t) \mapsto W(x,t)\, e^{i\phi}$

$$\frac{\partial W}{\partial t}\cancel{e^{i\phi}} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\cancel{e^{i\phi}} + W\cancel{e^{i\phi}} - |W|^2 \underbrace{|e^{i\phi}|^2}_{=1} W \cancel{e^{i\phi}}$$

Stationäre Lösung: $W(x,t) = a_0\, e^{iQx}$ mit $Q^2 = 1 - a_0^2$

$\omega_0 = -C_2 + (C_2 - C_1) Q^2 = 0$

Einsetzen liefert: $\frac{\partial W}{\partial t} = 0 = \underbrace{-Q^2 W}_{\frac{\partial^2}{\partial x^2} W} + W - |a_0|^2 W$

Benjamin-Feir-Instabilität: $1+c_1c_2<0$

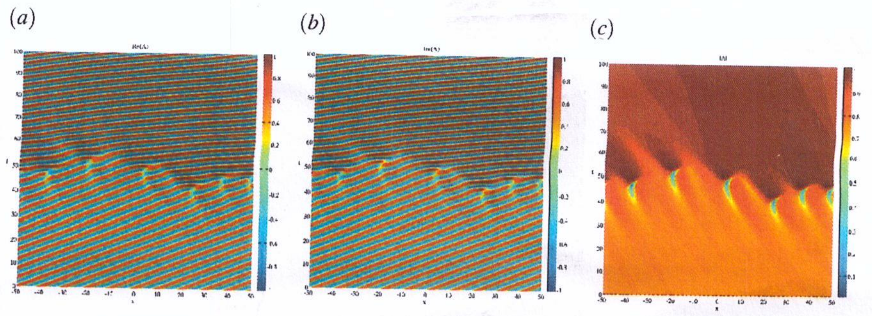
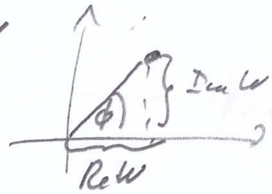


Fig. 5.2 Space-time plots of (a) Re(A), (b) Im(A) and (c) $|A|$ in the case of the Benjamin-Feir instability.

Bei „falscher" Wellenzahl (Q zu groß) ist das Muster instabil und das System geht in eine ebene Welle mit kleinerem Q (größerer Wellenlänge) über. Am Übergang kommt es zu Defekten (Phasensingularitäten) mit $|W|=0$

Fall: $1+c_1c_2 \lesssim 0$ schwach instabil : $|W| \simeq 1$

Phasenvariable: $\tan\phi = \frac{\mathrm{Im}\,W}{\mathrm{Re}\,W}$



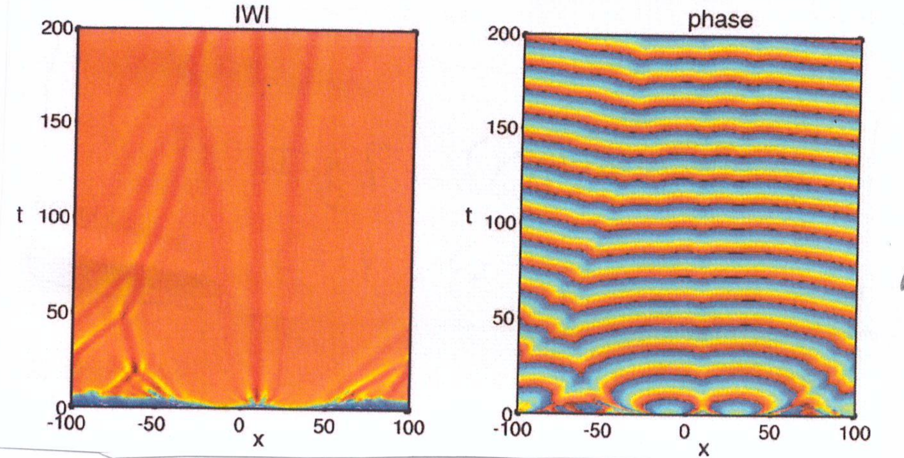


Fig 5

$c_1 = -4$

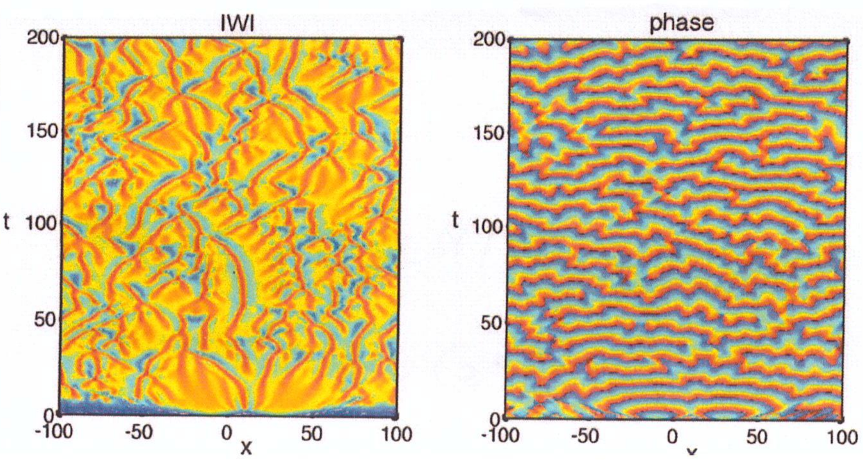
$c_2 = 0.5$

V. García-Morales, K. Krischer, Contemporary Physics 53, 79 (2012)

Defekt: bei x_0

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{\mathrm{Im}\,W(x,t)}{\mathrm{Re}\,W(x,t)} \neq \lim_{x\to x_0^-} \frac{\mathrm{Im}\,W(x,t)}{\mathrm{Re}\,W(x,t)}$$

von rechts — von links



$c_1 = -4$

$c_2 = 1$

Fig 6

Raum zeitliches Chaos: $c_1 = 0$, $c_2 = -3$

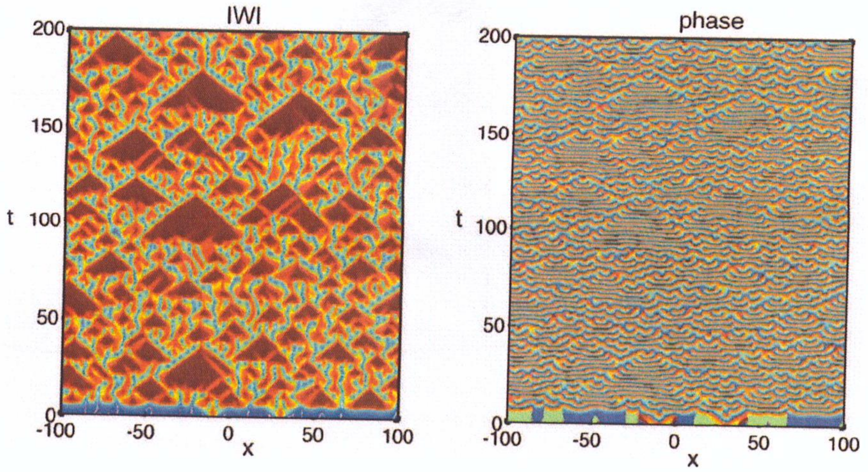


Figure 7. Spatiotemporal evolution of the absolute value $|W|$ of the complex amplitude (left) and phase (right) in a situation of spatiotemporal chaos: $c_1 = 0$, $c_2 = -3$.

Was passiert bei 2D? $W(x,y,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} W = W - (1+iC_2)|W|^2 W + (1+iC_2)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} W + \frac{\partial^2}{\partial y^2} W\right)$$

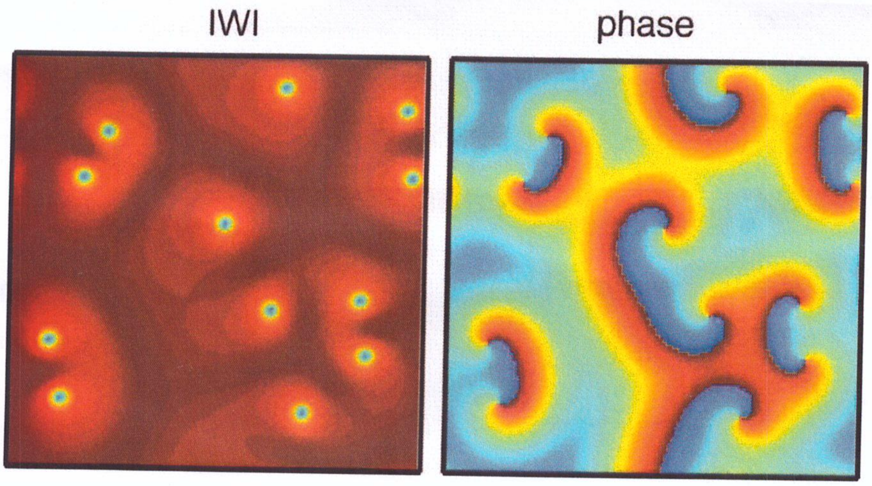


Figure 8. Spatial distribution of the absolute value $|W|$ of the complex amplitude (left) and phase (right) obtained after a transient from the 2D CGLE on a rectangular domain of 76 × 76 size in a situation of spatiotemporal chaos: $c_1 = 0$, $c_2 = 1$.

Defekte als Zentren von Spiralwellen in der Phase.

$\Rightarrow$ topologische Ladung $\quad n_{top} = \frac{1}{2\pi} \oint \nabla\phi \cdot ds$

Contour Integral (geschlossene Kurve)

$\Rightarrow$ 1 x im Kreis sammelt Phase 2π auf.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) W(x,y,t) = \Delta\, W(x,y,t)$$

mit Laplace-Operator Δ

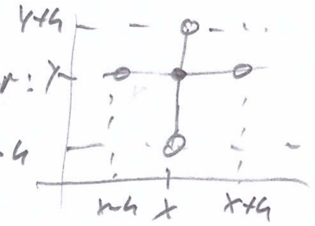
siehe Wellengleichung: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u$

$$\ddot{u} = c^2 \Delta u$$

$$\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = \operatorname{div}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Diskretisierung: $\Delta u(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left[u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)-4u(x,y)\right]$

Auf einem Gitter:



Differenzenquotient koppelt benachbarte Gitterpunkte

$\Rightarrow$ Verallgemeinerung: allgemeiner Kopplungskern:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = W-(1+ic_2)|W|^2 W + (1+ic_1)\int H(|x-x'|)\left[W(x')-W(x)\right]dx'$$

(i) $H(|x-x'|) = \delta^{(2)}(x-x')$ liefert komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung

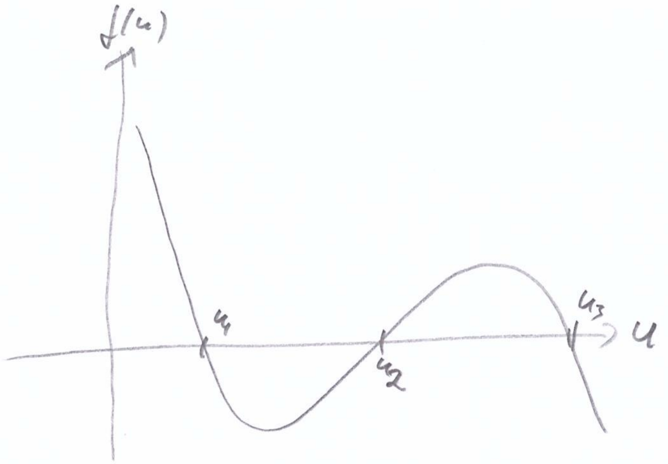
$$\int \delta^{(n)}(x-x')\, f(x')\, dx' = (-1)^n \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Rightarrow \int \delta^{2}(x-x')\, f(x')\, dx' = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

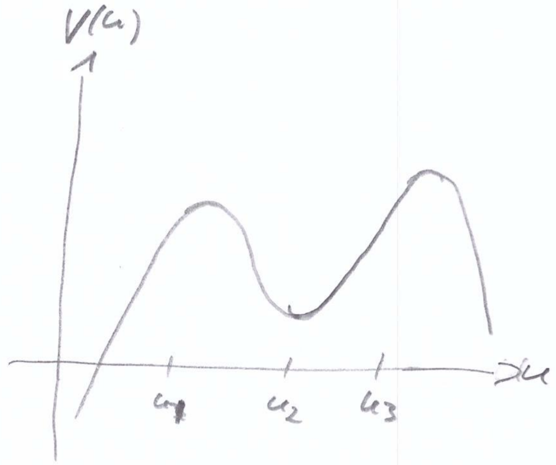
(ii) $H(|x-x'|) = \frac{K}{2\sqrt{D}}\exp\left[-\frac{|x-x'|}{\sqrt{D}}\right]$

4.3 Reaktionsdiffusionssysteme

Wiederholung: Schlögl-Modell (s. Übung 5)

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = f(u) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \quad \text{mit } f(u) = -k(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)$$





mitbewegte Koordinaten: $\xi = x - ct$: $u(x,t) = u(x-ct) = u(\xi)$

$\hookrightarrow \; -c u'(\xi) = f(u) + D u''(\xi)$

Definiere $V(u) = \int_0^u f(\tilde{u})\, d\tilde{u} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial u} = f(u)$ (Potenzial V)

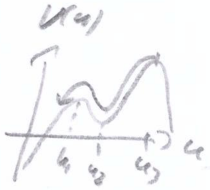
somit $D u'' = -\frac{\partial V}{\partial u} - c u'$

Bewegung im Potenzial V $\Rightarrow$ $c \;\hat{=}$ Reibungskoeffizient!

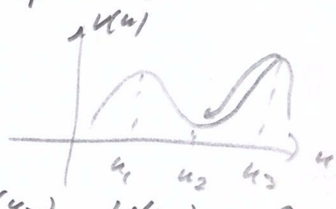
1. Fall $c=0$ (reibungsfrei): Energieerhaltung: $E = V(u) + \frac{1}{2} D \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2$

Betrachte $V(u_3) > V(u_1) \Rightarrow A := \int_{u_1}^{u_3} f(u)\, du > 0$

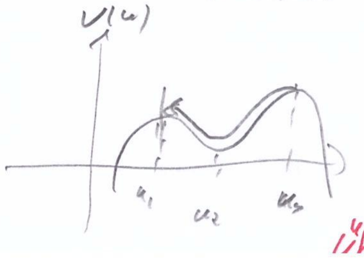
$\Rightarrow$ Teilchen (bei u_3 gestartet) schießt über u_1 hinaus
(es bleibt bei u_1 noch kinetische Energie über)



2. Fall c groß: Teilchen verliert Energie (Dissipation durch Reibung) und kommt bei u_2 zur Ruhe



3. Fall: c balanciert Potenzialunterschied $\Delta E = V(u_3) - V(u_1) \Rightarrow c = c_0$

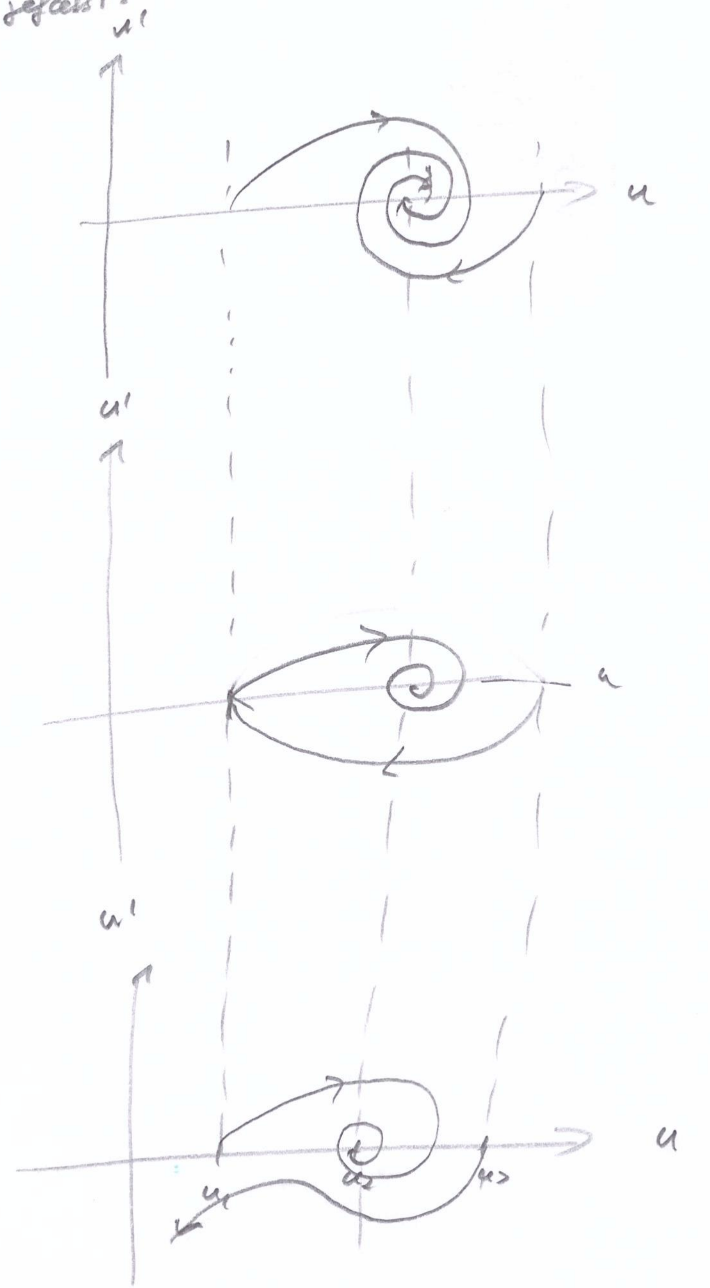


$\Rightarrow$ Teilchen erreicht gerade so u_1

$\Rightarrow$ Lösung: $u \to u_3$ für $\xi \to -\infty$
$u \to u_1$ für $\xi \to +\infty$

Übergangs(wellen)fronten (T

Zusammen gefasst:



$C > C_0$

$A < 0$

$C = C_0$

$A = 0$

$C < C_0$

$A > 0$

$$A = \int_{u_1}^{u_3} -k\,(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)\,du = 0$$

equal-area rule

Ursprung: autokatalytische Reaktionen:

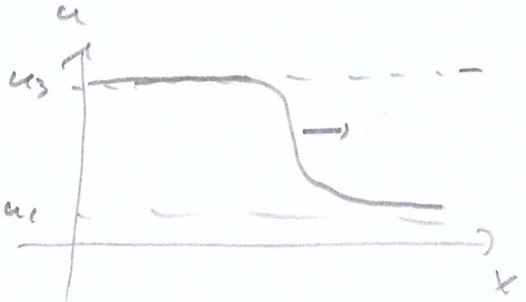
$$M + 2X \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} 3X \quad , \quad X \underset{k_4}{\overset{k_3}{\rightleftarrows}} N$$

Reaktionskinetik: $\dot{X} = k_1 M X^2 - k_2 X^3 - k_3 X + k_4 N$

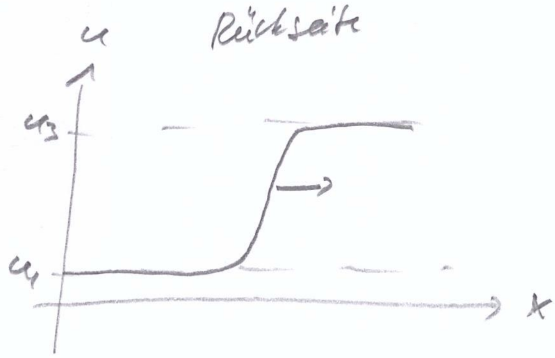
mit M und N konstant, folgt das Schlögl-Modell

wandernde Pulse (travelling pulses)

Vorderseite



Rückseite



$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u,v) + D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow A(v) = \int_{u_1}^{u_3} f(u,v)\,du$$

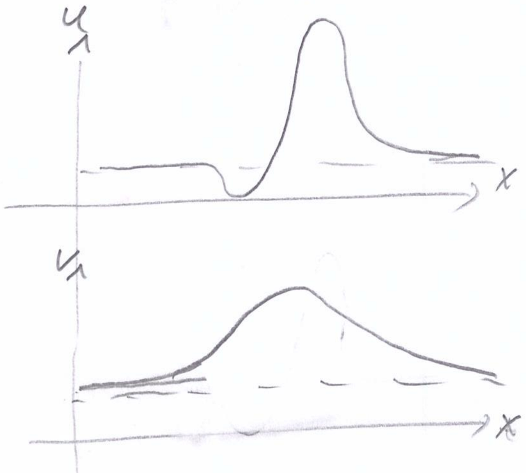
$A > 0$: Anregung (Ignition)

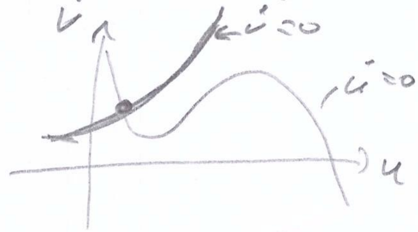
$A < 0$: Auslöschung (Quenching)

u : Aktivator, v : Inhibitor

$\Rightarrow$ 2. Variable v fängt Dynamik ein: $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\tau}\left(v - \bar{v}(u)\right)$

$\uparrow$ Gleichgewichtszustand (ggf. u-Abhängig)





Bsp: FitzHugh-Nagumo-Modell (s. Blatt 5)

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = u - \frac{u^3}{3} - v + D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = u + a$$

Brüsselator-Modell

$A \rightarrow X \;,\; B + X \rightarrow Y + D \;,\; 2X + Y \rightarrow 3X \;,\; X \rightarrow E$

$\Rightarrow$ u: Konzentration von X, v: Konzentration von Y:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = A - Bu + u^2 v - u + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Bu - u^2 v + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$\Rightarrow$ Turing-Muster

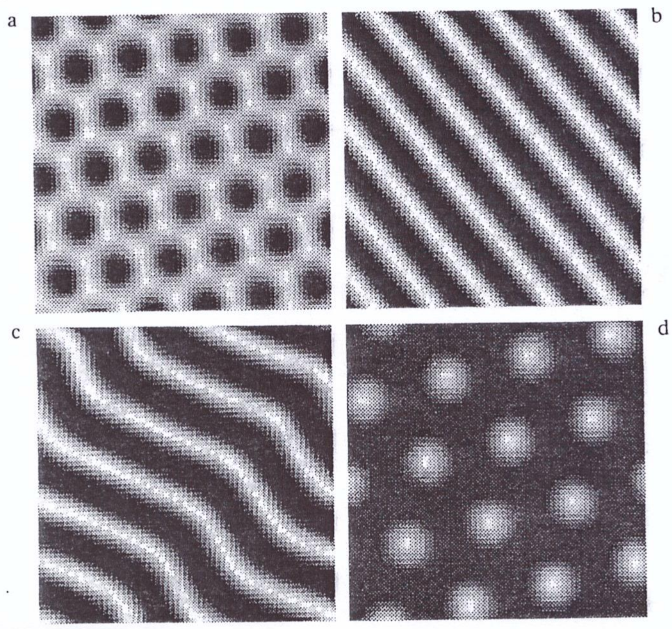


Fig. 5.15a–d. Basic types of two-dimensional Turing-patterns obtained by the numerical simulation of the Brusselator model: (**a**) a hexagonal lattice of cells, (**b**) stripes, (**c**) zig-zag stripes, and (**d**) a hexagonal lattice of spots. (From [5.32])

aus P. Borckmann, A. DeWitt, G. Dewel, Physica A 188 A, 171 (1992)

Competition in ramped Turing structures

Belousov-Zhabotinskii-Reaktion (BZ-Reaktion)

beschreibbar durch 2 effektive Komponenten:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1-u) - \frac{v(u-a)}{u+a} + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\tau}(v-bu) + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$, a,b>0$

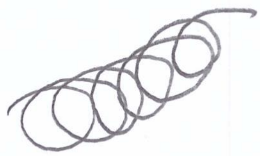
$\tau \gg 1$

(v: langsam)

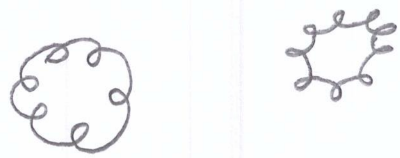
Spiralwellen möglich: stationär oder wandernd

Spiral tip auf Kreis

Spiraltip auf Kurve



oder



Muster in 3D: Scroll waves

Scroll rings

twisted scrolls

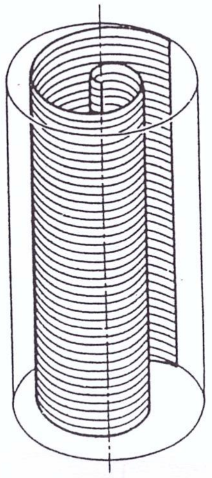


Fig. 3.31. Straight scroll vortex

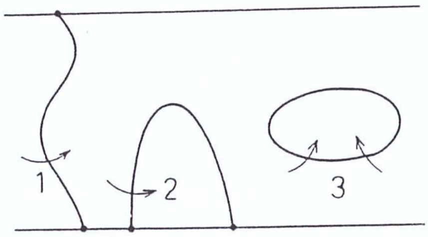


Fig. 3.32. Possible deformations of the vortex filament. Arrows indicate the direction of rotation

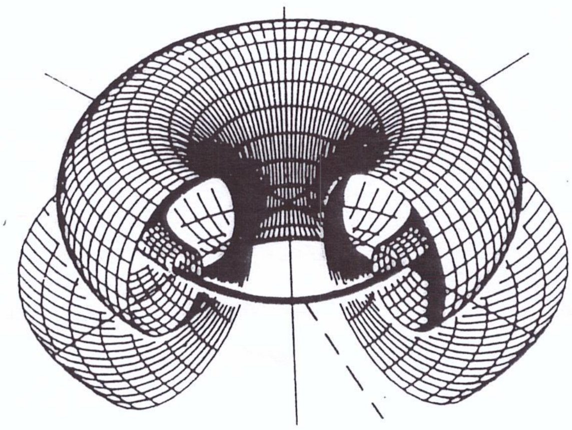


Fig. 3.33. Scroll ring

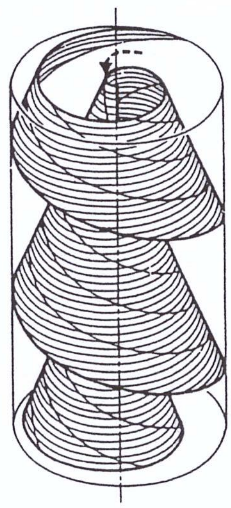
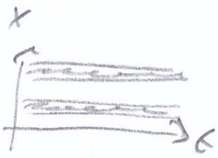


Fig. 3.34. Straight twisted scroll

4.4 Beispiele räumlicher Muster



Wiederholung: – Turing: zeitlich konstantes Muster

– Hopf: homogene Oszillationen

Frage: Geht das auch gleichzeitig?

↳ W. Just et al. PRE 64, 026219 (2001)

2 Variablen-Modelle:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left[j_0 - (u-a)\right] + D\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{u-a}{1+(u-a)^2} - Ta + \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}$$

u: Spannung, a: Ladungsträgerdichte, T: Tunnelrate

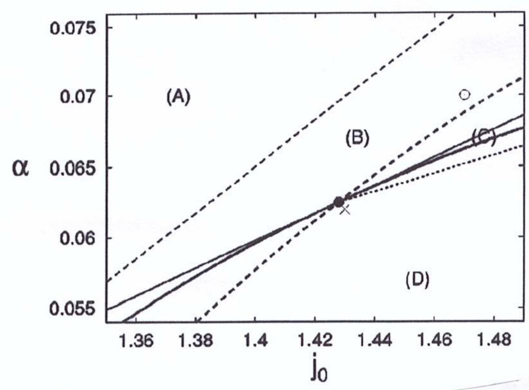


FIG. 3. Different stability regimes in the vicinity of the Turing-Hopf point (full circle) in the (j_0, α) parameter plane. Gray: Turing (broken) and Hopf (full) bifurcation line (see Fig. 1). Existence of Hopf mode [full line, see Eq. (33)], stability of Hopf mode [dotted line, see Eq. (34)], and saddle-node bifurcation of Turing patterns [broken line, see Eq. (60)]. Region (A): trivial solution, region (B): coexistence between trivial solution and Turing pattern, region (C): Turing pattern, region (D): coexistence between Hopf mode and Turing pattern. × and ○ mark the parameter settings used in Figs. 4 and 7, respectively.

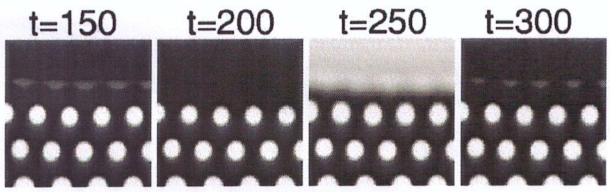


FIG. 5. Coexistence pattern between Turing and Hopf state at $j_0=1.43$ and $\alpha=0.045$. The density plots show the current density $j(r,t)$ at four different times. The time labels refer to Fig. 6.

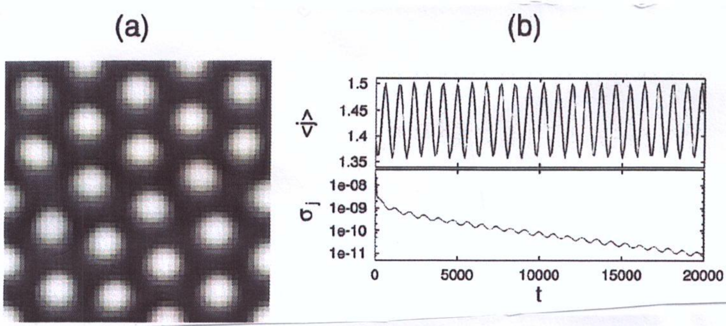


FIG. 4. (a) Density plot of stationary Turing pattern for the current density $j(r,t)=u(r,t)-a(r,t)$. (b) Relaxation of a Hopf mode. Time dependence of the spatial average $\langle j\rangle$ of the current and the corresponding variance $\sigma_j=\langle j^2\rangle-\langle j\rangle^2$. Parameter settings for both parts are the same ($j_0=1.43$, $\alpha=0.062$, $D=5$, and $T=0.05$, see Fig. 3), but different initial conditions had been chosen.

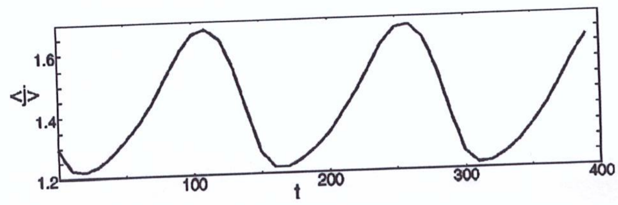


FIG. 6. Time dependence of the spatial average of the current

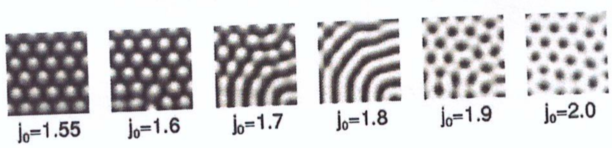
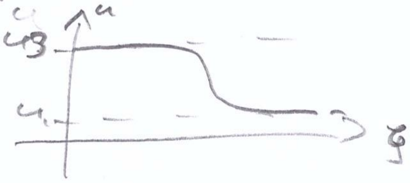


FIG. 8. Time independent patterns appearing for different values of the total current j_0 at $\alpha=0.075$, $T=0.05$, and $D=5$: Transition from hot spots (left) to cold spots (right). Simulations have been performed on a system of size 200×200 with Neumann boundary conditions.

Bemerkg zu Front-Lösung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \xrightarrow{\xi = x-ct} Du'' + cu' + f(u) = 0$$



Bestimme c allgemein:

Idee: Multiplizieren mit u' und integrieren:

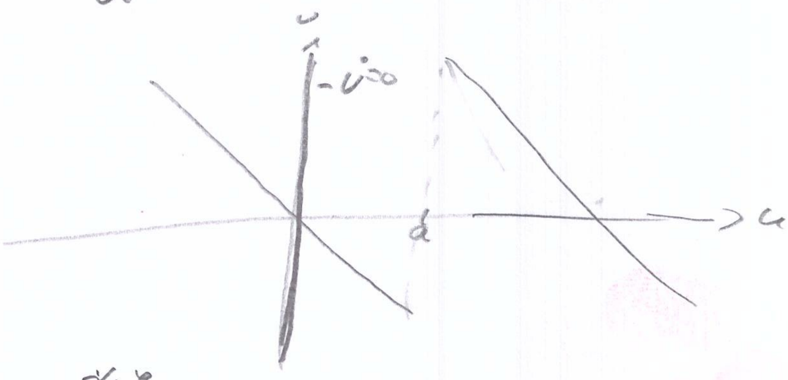
$$\underbrace{D\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \frac{d^2u}{d\xi^2}\frac{du}{d\xi}}_{=\frac{1}{2}D\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2\Big|_{-\infty}^{\infty}=0} + c\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, f(u)\frac{du}{d\xi}}_{=\int_{u_1}^{u_3} du\, f(u) = A} = 0$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{\int_{u_1}^{u_3} du\, f(u)}{\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2} \begin{cases} > 0 \text{ für } A>0: \text{ Zündfront wandert } (u_1 \text{ metastabil}) \\ = 0 \text{ für } A=0: \text{ equal area rule} \\ < 0 \text{ für } A<0: \text{ Löschfront } (u_3 \text{ metastabil}) \end{cases}$$

Approximation des FitzHugh-Nagumo-Modells

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} &= u - \frac{u^3}{3} - v + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= u + a \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -u - H(u-a) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \varepsilon u \end{aligned}$$

$$H(u-a) = \begin{cases} u & u \le a \\ u-1 & u > a \end{cases}$$



$\Rightarrow$ stückweise linear $\Rightarrow$ Lösg aus $A_i e^{\lambda_i \xi}$ zusammensetzbar

John Rinzel, Joseph B. Keller Biophys. Journal 13, 1313 (1973)

$\rho \propto Z$:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= s(\eta - \eta\alpha + \alpha - q\alpha^2),\\ \dot{\eta} &= s^{-1}(-\eta - \eta\alpha + f\rho),\\ \dot{\rho} &= w(\alpha - \rho).\end{aligned} \tag{2.5}$$

The parameters s, w and q are determined from the rates of the reactions, see [29, 25].

Krug et al. introduced in [30] the modified Oregonator model, which describes the light sensitivity of the Belousov-Zhabotinsky reaction. For this purpose, the reaction scheme (2.3) was extended by a simple reaction, corresponding to the light-induced bromide flow

$$\xrightarrow{\Phi} Y,$$

which leads to the modified three-component Oregonator model, given by

$$\begin{aligned}\epsilon\dot{x} &= x(1-x) + y(q-x),\\ \epsilon'\dot{y} &= \phi + fz - y(q+x),\\ \dot{z} &= x - z.\end{aligned} \tag{2.6}$$

The parameter ϕ accounts for the light intensity. The following parameter values were suggested: $q = 2 \times 10^{-3}, f = 2.1, \epsilon = 0.05, \epsilon' = \epsilon/8$. With this set of parameters, it was found that for $\phi = 1.762 \times 10^{-3}$ the stable equilibrium in Eq. (2.6) undergoes a Hopf bifurcation, thus giving access to both excitable (monostable) and oscillatory reaction kinetics upon variation of the parameter ϕ near the bifurcation value.

Often, one can exploit the smallness of the parameter ϵ' and set the left-hand side of the second equation in Eq. (2.6) equal zero. In this case the model can be further reduced to the so-called two-component version of Oregonator, which reads

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{1}{\epsilon}\Big[u - u^2 - (fv + \phi)\frac{u-q}{u+q}\Big],\\ \dot{v} &= u - v.\end{aligned} \tag{2.7}$$

We would like to mention that Eq. (2.7) is qualitatively similar to the FitzHugh-Nagumo equation [9, 10], which describes the propagation of the action potential in the squid axons.

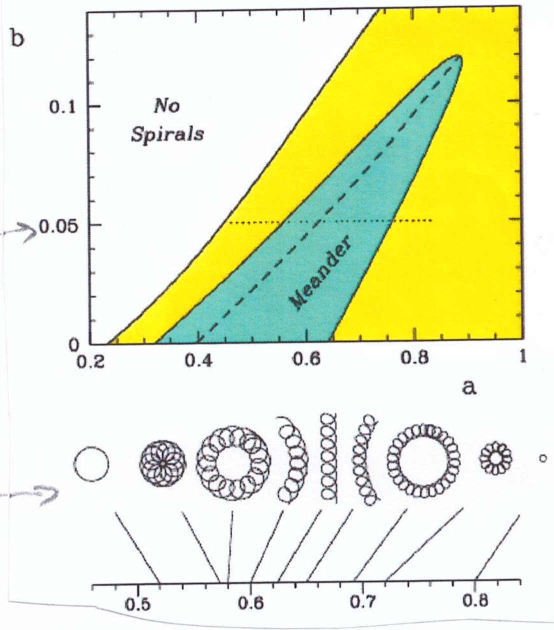
For spatially extended Belousov-Zhabotinsky reaction we must account for diffusion:

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \frac{1}{\epsilon}\Big[u - u^2 - (fv + \phi)\frac{u-q}{u+q}\Big] + D\Delta u,\\ \partial_t v &= u - v.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Barkley-Modell: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} u(1-u)\left(u - \frac{v+b}{a}\right) + \Delta u$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = u - v$$

Dwight Barkley: Physica D 49, 61 (1991)
+ Dowle IJBC 7, 2529 (1997)



b = 0.05

Oregonator-Modell: (2D)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left[u(1-u) - (fv+\phi)\frac{u-q}{u+q}\right] + D\Delta u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = u - v$$

Dissertation Grigory Bordyugov (2006)

V. Zykov et al.: PRL 92, 018304 (2004)

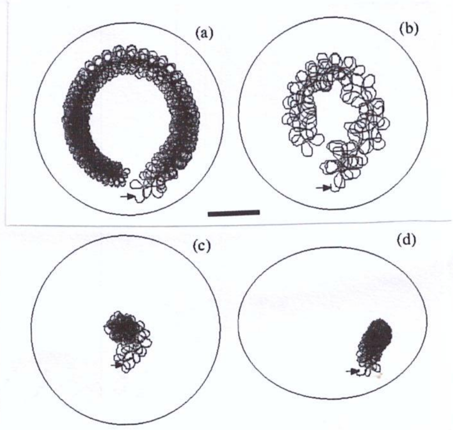


FIG. 2. Resonant drift of a spiral wave induced by a global feedback with $k_{fb} = -1.5$, $B_0 = 25$, and $I_0 = 70$. (a)–(c) Circular domain of radius $R = \lambda$; (d) elliptical domain with large axis $a = 2\lambda = 4$ mm and small axis $b = a/1.25$. In (a) and (d), the time delay is $\tau = 0$, in (b) $\tau/T_\infty = 0.32$, and in (c) $\tau/T_\infty = 0.5$. Initial spiral tip locations are marked by arrows. Scale bar: 1 mm.

VOLUME 92, NUMBER 1 PHYSICAL REVIEW LETTERS week ending 9 JANUARY 2004

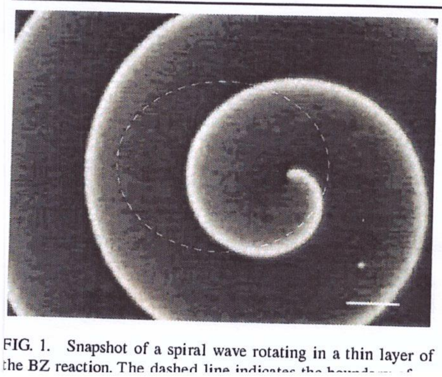


FIG. 1. Snapshot of a spiral wave rotating in a thin layer of the BZ reaction. The dashed line indicates the boundary of

Frage: Wann gibt es eine diffusive Instabilität?

↳ Annahme: ohne Diffusion ist das System stabil

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u,v) + D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f_2(u,v) + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Linearisierung:

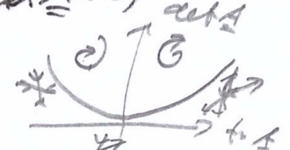
$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} - D_1 k^2 & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} - D_2 k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - D_1 k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - D_2 k^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr} \underline{\underline{A}} = \frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} - (D_1 + D_2) k^2 = a_{11} + a_{22} - (D_1 + D_2) k^2$$

$$\det \underline{\underline{A}} = (a_{11} - D_1 k^2)(a_{22} - D_2 k^2) - a_{12} a_{21}$$

Instabilität für (i) $\operatorname{tr} \underline{\underline{A}} > 0$ (Fokus oder Knoten für $\det \underline{\underline{A}} > 0$)

(ii) $\det \underline{\underline{A}} < 0$ (Sattel)



(i) $a_{11} + a_{22} - (D_1 + D_2) k^2 < 0$, weil $\underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\operatorname{tr} \underline{\underline{A}}(D_i = 0)} < 0$, damit System für $D_1 = D_2 = 0$ stabil ist!

$$\Rightarrow \text{(ii)} \det \underline{\underline{A}} = \underbrace{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}_{\det \underline{\underline{A}}_0 = \det \underline{\underline{A}}(D_i = 0) > 0} - (D_1 a_{22} + D_2 a_{11}) k^2 + D_1 D_2 k^4$$

Begründung wie (i)

Instabilität bei $\det \underline{\underline{A}} = 0 \Rightarrow$ pos. reelle Nullstellen von Polynom in $k^2 = q$

$$\Rightarrow D_1 D_2 q^2 - (D_1 a_{22} + D_2 a_{11}) q + \det \underline{\underline{A}}_0 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow q_{1,2} = \frac{1}{2 D_1 D_2} \left((D_1 a_{22} + D_2 a_{11}) \pm \sqrt{(D_1 a_{22} + D_2 a_{11})^2 - 4 D_1 D_2 \det \underline{\underline{A}}_0} \right)$$

$\Rightarrow$ (a) $D_1 a_{22} + D_2 a_{11} > 0$

(b) $(D_1 a_{22} + D_2 a_{11})^2 > 4 D_1 D_2 \det \underline{\underline{A}}_0$

(a) $a_{22} + a_{11}\dfrac{D_2}{D_1} > 0 \Rightarrow \varrho = \dfrac{D_2}{D_1} > -\dfrac{a_{22}}{a_{11}} > 0$

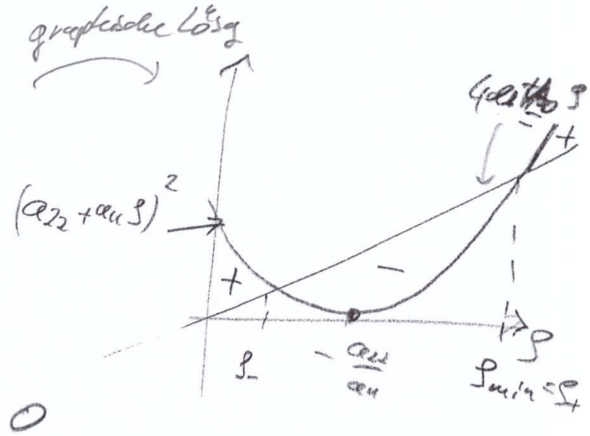
$a_{22} + a_{11} < 0$

$\Rightarrow -\dfrac{a_{22}}{a_{11}} > 1$

↳ $a_{11} < 0$, $a_{22} > 0$ oder $a_{22} < 0$, $a_{11} > 0$

(b) $\Big(a_{22} + a_{11}\underbrace{\dfrac{D_2}{D_1}}_{=:\varrho}\Big)^2 > 4\dfrac{D_2}{D_1}\det \underline{\underline{A}}_0$

graphische Lösg



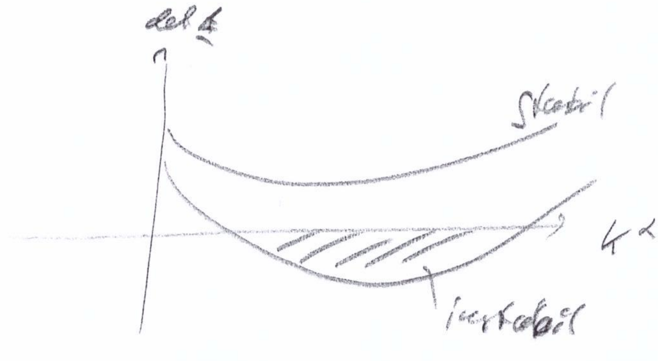
$\Rightarrow (a_{22} + a_{11}\varrho)^2 > 4\det \underline{\underline{A}}_0\,\varrho$

$\Rightarrow \varrho^2 + \varrho\left(\dfrac{-4\det \underline{\underline{A}}_0 + 2a_{22}a_{11}}{a_{11}^2}\right) + \dfrac{a_{22}^2}{a_{11}^2} > 0$

$\Rightarrow \varrho_{\pm} = \dfrac{1}{a_{11}^2}\left(2\det \underline{\underline{A}}_0 - a_{22}a_{11} + \sqrt{(2\det \underline{\underline{A}}_0 - a_{22}a_{11})^2 - a_{11}a_{22}}\right)$

$= \dfrac{1}{a_{11}^2}\left(2\det \underline{\underline{A}}_0 - a_{11}a_{22} \pm 2\sqrt{\det \underline{\underline{A}}_0\,(\det \underline{\underline{A}}_0 - a_{11}a_{22})}\right)$

$\Rightarrow$ Unterschied in Diffusionskonstanten muss groß genug sein!



Zurück zu Brüsselator-Modell: $a_{11} = B-1>0$, $a_{22} = -A^2 < 0$

$$\frac{D_2}{D_1} > g_{min} = \frac{1}{(B-1)^2}\left(2A^2 + (B-1)A^2 + 2\sqrt{A^2\big(\underbrace{A^2+(B-1)A^2}_{+BA^2}\big)}\right)$$

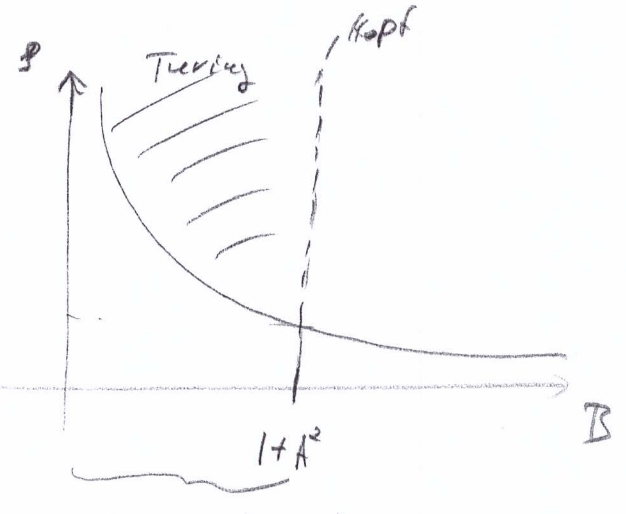
$$= \frac{1}{(B-1)^2}\left(A^2(B+1) + 2A^2\sqrt{B}\right)$$

$$= \frac{A^2}{(B-1)^2}\left(B+1+2\sqrt{B}\right)$$

$$= \frac{A^2\,(\sqrt{B}+1)^2}{(B-1)^2} = \frac{A^2\,\cancel{(\sqrt{B}+1)}^2}{\left[(\sqrt{B}-1)\,\cancel{(\sqrt{B}+1)}\right]^2}$$

$$= \frac{A^2}{\sqrt{B}-1}$$

$\Rightarrow$



$B < 1+A^2 \Rightarrow u^*, v^*$ stabil

Frage: What about the following Systems?

(1) $\dot{u} = R_1(u,v)\,u$ R_i: Wachstumsraten

$\dot{v} = R_2(u,v)\,v$

Gibt es für negative Wachstumsraten Musterbildung durch Diffusion?

(2) $\dot{u} = R(u)\,u - p(u)\,v$

$\dot{v} = e\,p(u)\,v - \mu(v)\,v$

R: Wachstum Beute u

μ: Mortalität Räuber v

p: per capita Fressrate

e: Konversionskoeffizient

$\Rightarrow$ Räuber (u) - Beute (v) - Modell

Gibt es hier Musterbildung durch Diffusion?

Teste $\operatorname{tr}\underline{\underline{A}}$, $\det\underline{\underline{A}}$ ...

(1) $$\underline{\underline{A}}_0 = \begin{pmatrix} u\frac{\partial R_1}{\partial u} + R_1 & \frac{\partial R_1}{\partial v} \\ \frac{\partial R_2}{\partial u} & v\frac{\partial R_2}{\partial v} + R_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr}\underline{\underline{A}}_0 = u^*\frac{\partial R_1}{\partial u} + \overbrace{R_1 + v^*\frac{\partial R_2}{\partial v} + R_2}^{R_i < 0}$$

$$= R_1 + R_2 < 0$$

$\uparrow$ $u^*=0=v^*$

$$\det\underline{\underline{A}}_0 = \underbrace{R_1R_2}_{>0} - \underbrace{\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial R_2}{\partial u}}_{\gtrless 0} \gtrless 0$$

(2) $$\underline{\underline{A}}_0 = \begin{pmatrix} R(0) & -p(0) \\ 0 & -\mu(0) + e\,p(0) \end{pmatrix} \Rightarrow$$? für trivialen FP $u^*=0$, $v^*=0$

? für nichttrivialen FP $u^*\neq 0$, $v^*\neq 0$

Bsp.: Reaktionsdiffusionsmodell in der Natur

Kondo Nature 376, 765 (1995)

$$\frac{\partial A}{\partial t} = c_1 A + c_2 I + c_3 - D_A\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - g_A A$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c_4 A + c_5 - D_I\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - g_I I$$

Recherche für:

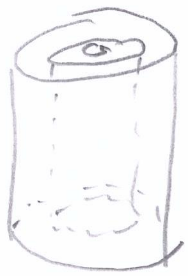
a) Taylor-Couette-Instabilität

b) Rayleigh-Plateau-Instabilität

c) Saffmann-Taylor-Instabilität

d) Kelvin-Helmholtz-Instabilität

a) Taylor-Couette-Instabilität



Navier-Stokes-Gleichung:

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho(\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v}$$

$$= -\underline{\nabla} p + \mu \Delta \underline{v} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{v}) + \underline{f}$$

ρ: Dichte

$\underline{v}$: Geschwindigkeit

p: Druck

μ: dynamische Viskosität, ζ: Volumenviskosität

$\underline{f}$: Volumenkraftdichte

Für inkompressible Flüssigkeiten: $\underline{\nabla}\cdot\underline{v} = 0$

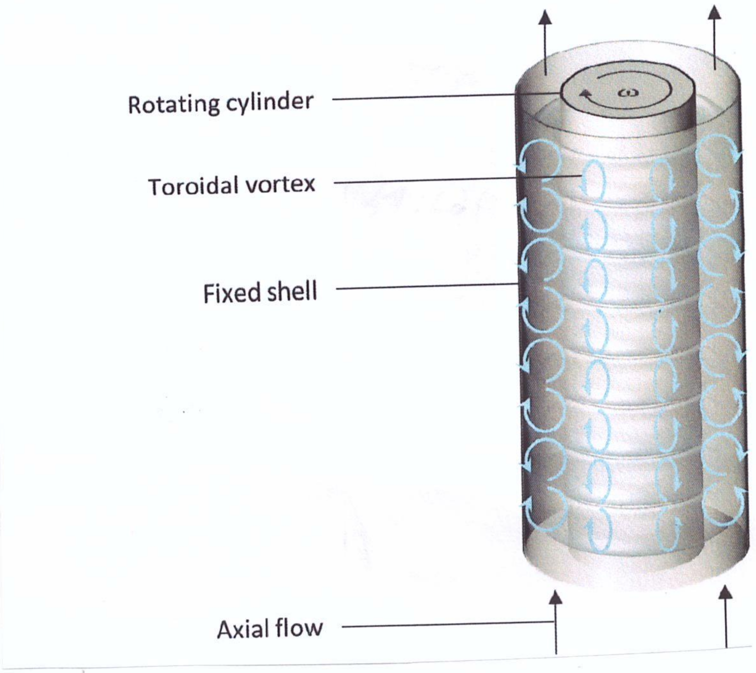
$$\rho \quad \frac{\partial \underline{v}}{\partial v} + (\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v} = -\underline{\nabla} p + \mu \Delta \underline{v} + \underline{f}$$

in Zylinderkoordinaten: r, θ, z : $v = Ar + \frac{B}{r}$

Bei zu großem ω:

Zentrifugale Instabilität löst Torus-förmige Vortices aus

$\Rightarrow$ Taylor-Vortex / Couette Strömung



Instabilitäten höherer Ordnung

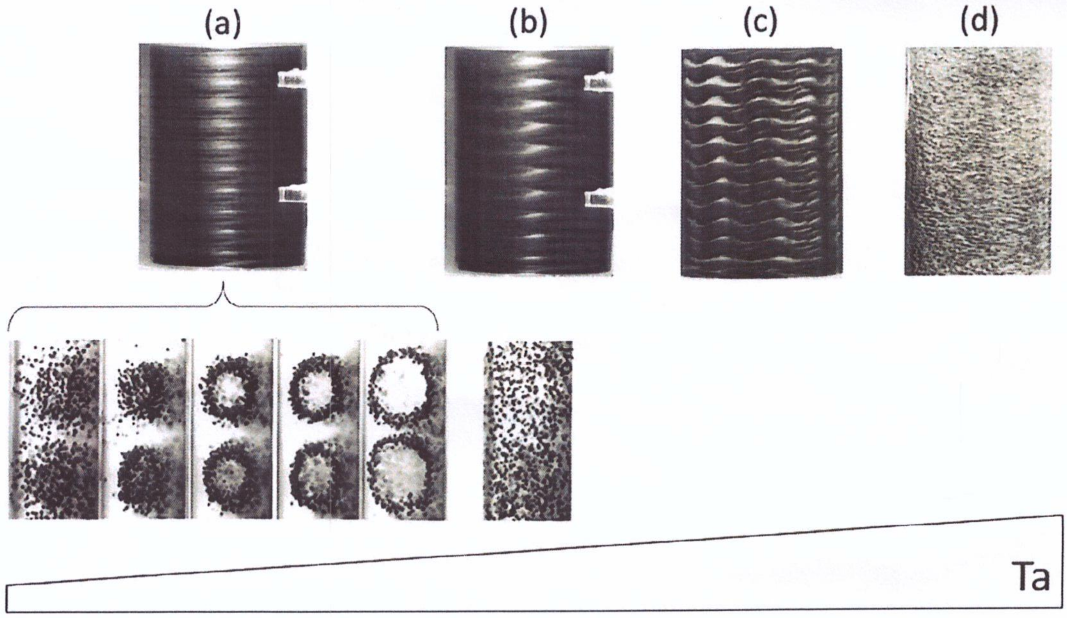
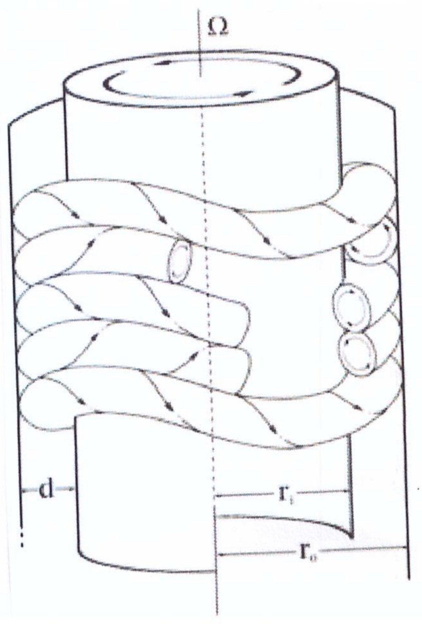
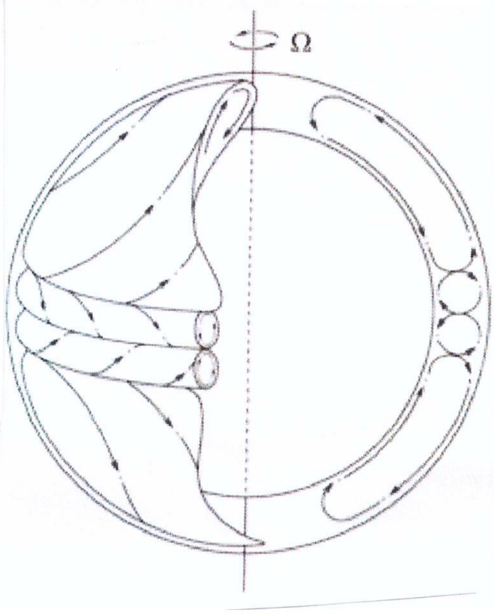


FIGURE 3 Transition through the major flow types in a Taylor-Couette reactor and equilibrium locations of neutrally buoyant particles with growing Taylor number. (a) Taylor-vortex flow, (b) Wavy vortex flow, (c) modulated wavy vortex flow, (d) turbulent flow. Images for (a) and (b) captured by Majji and Morris (edited for increased simplicity).[31] Reproduced with permission from AIP Publishing. Copyright 2018. Pictures for (c) and (d) taken by Andereck.[14] Reproduced with permission from Cambridge University Press. Copyright 2006





Rayleigh-Plateau-Instabilität (b)

- die von der Oberflächenspannung getriebene, spontane Umwandlung eines flüssigen Zylinders in einzelne Tropfen. (x)

Bsp: Drosselt man den Strahl aus einem Wasserhahn stark, so kommt er am Boden des Waschbeckens in Form einzelner Tropfen an. Der zunächst zylindrische Strahl hatte genügend Zeit, beim Fall in einzelne Tropfen zu zerfallen. Er tut dies, weil die Kugelform (Tropfen) das günstigere Verhältnis von Volumen zu Oberfläche aufweist als der Zylinder (Strahl) $\rightarrow$ Plateaus Analyse von Savarts Experiment führt zu $\lambda \approx 8{,}8a$ a: Radius

Bsp: Tautropfen auf Spinnennetz

Bsp: Wasserfarben auf Keramik (hydrophile Streifen vor hydrophobem Hintergrund)

x) ein Wasserstrahl (flüssiger Zylinder) zerfällt spontan in eine Perlenschnur einzelner Tropfen, weil sich dadurch die Gesamtoberfläche des Wassers verringert.

a: Radius des Wasserzylinders

b: momentaner Radius

<b>: Mittelwert von b

$\zeta_k \ll a$: Schwingungsamplitude

Zylinder instabil gegenüber jeder periodischen Deformation mit $k < k_c = \frac{1}{a}$ bzw $\lambda > 2\pi a$.

Wachstumsrate einer Mode mit $k < k_c$:

Viskosität vernachlässigbar $\Rightarrow$ einfache Berechnung der Geschwindigkeit $\vec{u}(x,r)$ verbunden mit der Rate der Änderung von ζ_k

Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$ $\Rightarrow$ Lösung $\phi \sim \cos(kx) f(r) \frac{d\zeta_k}{dt}$

$T = E_{kin} \sim \left(\frac{d\zeta_k}{dt}\right)^2$ mittlere kinet. Energie pro Längeneinheit

$\hookrightarrow$ Proportionalitätskonstante

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung $\frac{d^2\zeta_k}{dt^2} \Longleftrightarrow \zeta_k$

$s_k = \frac{\text{momentane Wachstumsrate}}{\text{Amplitude}} = \frac{\dot{\zeta}_k}{\zeta_k}$

$\xrightarrow{\text{Rayleigh}}$ $s_k = 0$ für $k = k_c$

s_k maximal für $k = 0{,}697 k_c$ bzw $\lambda = 9{,}02a$

Savarts Experiment: $\lambda = 8{,}8a$

2% Fehler sind Messfehler

c) Saffman-Taylor-Instabilität (viscous fingering)

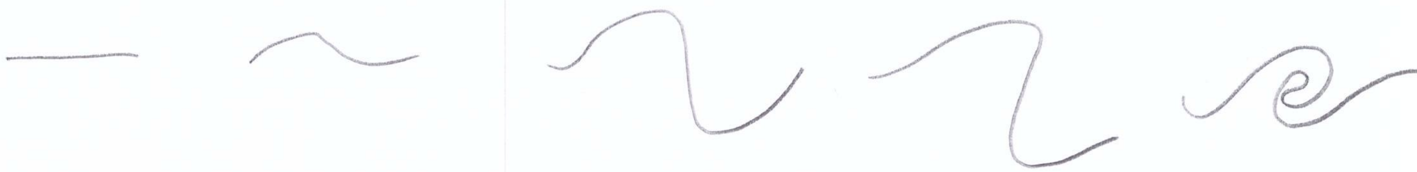
Grenzschicht zwischen 2 Flüssigkeiten

Siehe auch Rayleigh-Taylor-Instabilität

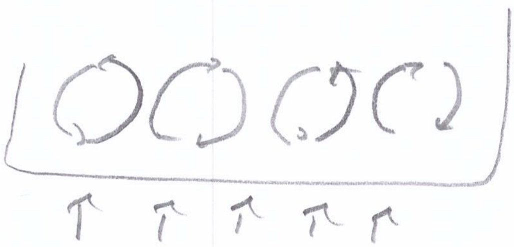
d) Kelvin-Helmholtz-Instabilität

Ursache: kleine Störung an der Scherschicht zweier Fluide mit unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten

↳ Wellen, Wirbel, Wolken



e) Rayleigh-Bénard-Konvektion



Hitze/Wärme

5. Zusammenfassung

1. Einführung: Dynamische Systeme

1.1 Vektorfelder als dynamisches System

1.2 Stabilität und Langzeitverhalten

2. Bifurkationen

2.1 Eigenwert-Null-Bifurkation

2.2 Hopf-Bifurkation

2.3 Lokale Bifurkationen von Grenzzyklen

2.4 Globale Bifurkationen von Grenzzyklen

2.5 Bifurkationen räumlicher Muster

3. Deterministisches Chaos

3.1 Klassifikation

3.2 Definition

3.3 Seltsame Attraktoren

3.4 Chaos-Kontrolle

4 Strukturbildung und Muster

4.1 Einführung

4.2 Komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung

4.3 Reaktionsdiffusionssysteme

4.4 Beispielsysteme räumlicher Muster

5. Zusammenfassung

1. Übung

- Love Affairs
- Maxwell-Bloch-Gleichungen

2. Übung

- Erzeugung eines dimensionslosen Modells
- Poincaré-Abbildung
- (• Poincaré-Bendixson-Theorem)

3. Übung

- zeitlich diskrete Abbildungen
- Lorenz-System revisited

4. Übung

- Henon-Abbildung
- OGY-Kontrolle revisited
- Delay embedding

5. Übung

- Komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung
- FitzHugh-Nagumo-Modell
- Schlögl-Modell

6. Übung

- Brusselator-Modell revisited
- Chaotisches Wasserrad
- Freie Rotation eines starren Körpers

7. Übung

- Poincaré-Bendixson-Theorem

1. Blatt

1. Lotka-Volterra-Modell
2. Van-der-Pol-Oszillator

2. Blatt

3. Poincaré-Abbildung
4. Reduziertes SNIPER-Modell

3. Blatt

5. logistische Abbildung
6. Homokliner Orbit im Lorenz-System

4. Blatt

7. Menger-Schwamm und fraktale Dimension
8. Chaos-Kontrolle-OGY-Methode

5. Blatt

9. Benjamin-Feir-Instabilität
10. FitzHugh-Nagumo-System

6. Blatt

11. Stabilität der freien Rotation eines starren Körpers
12. Chaotisches Wasserrad