

# 1. Übung zur Nichtlinearen Dynamik & Strukturtheorie 1

Inhalt: 1) Love Affairs

2) Maxwell-Block-Gleichungen

1 Love Affairs (Strogatz 1988, Sprott 2004)

$R(t)$ : Romeo's  <sup>$R>0$</sup>  Liebe /  <sup>$R<0$</sup>  Abneigung für Julia

$J(t)$ : Julia's  <sup>$J>0$</sup>  "  <sup>$J<0$</sup>  Romeo

Dynamisches System:

$$\dot{R} = \alpha R + \beta J$$

$$\dot{J} = \gamma R + \delta J$$

1. Fall:

$$\dot{R} = aJ$$

$$\dot{J} = -bR$$

,  $a, b > 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{J} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}$$

Q: (i) Eigenwerte (+ Fixpunkt)

(ii) Typ des Fixpunkts

(iii) Phasenraumportraits

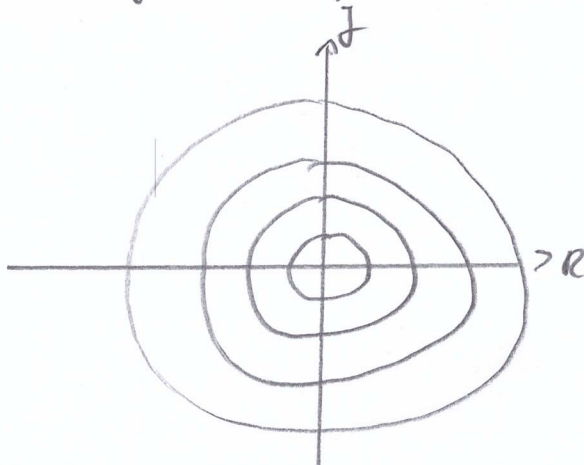
(i) Eigenwerte:  $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ -b & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + ab \stackrel{!}{=} 0$

Fixpunkt:  $\begin{pmatrix} R^k \\ J^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \pm \sqrt{-ab} = \pm i\sqrt{ab}$$

(ii) rein imaginäre Eigenwerte  $\Rightarrow$  Zentrum

(iii)



Interpretation?

2. Fall: 2 vorsichtige Liebhaber

$$\begin{aligned} \dot{R} &= aR + bJ \quad \text{mit } a < 0 \quad (\text{Grad der Vernunft}) \\ \dot{J} &= bR + aJ \quad b > 0 \quad (\text{Grad der Erwiedrig}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}$$

$$(i) \text{ FP: } \begin{pmatrix} R^* \\ J^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 - b^2$$

$$= \lambda^2 - 2a\lambda - b^2 + a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2a}{2}\right)^2 + b^2}$$

$$= a \pm b$$

Frage: Eigenvektoren  $v_{1,2}$  zu  $\lambda_{1,2}$ ? ( $Av_{1,2} = \lambda_{1,2} v_{1,2}$ )

$$1) \begin{pmatrix} a-(a+b) & b \\ b & a-(a+b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b v_1^{(1)} + b v_1^{(2)} = 0 \\ b v_1^{(1)} - b v_1^{(2)} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1^{(1)} = v_1^{(2)} \text{ etwa } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} a-(a-b) & b \\ b & a-(a-b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^{(1)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

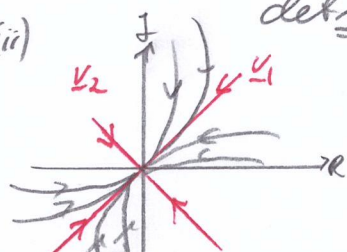
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b v_2^{(1)} + b v_2^{(2)} = 0 \\ b v_2^{(1)} + b v_2^{(2)} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_2^{(1)} = -v_2^{(2)} \text{ etwa } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Abpendern:  $\text{tr} A = 2a < 0$  für  $a < 0$

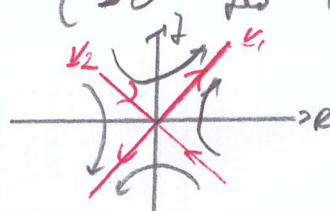
$$\det A = a^2 - b^2$$

$$\begin{cases} < 0 & \text{für } a^2 < b^2 \\ > 0 & \text{für } a^2 > b^2 \end{cases}$$

(ii) + (iii)

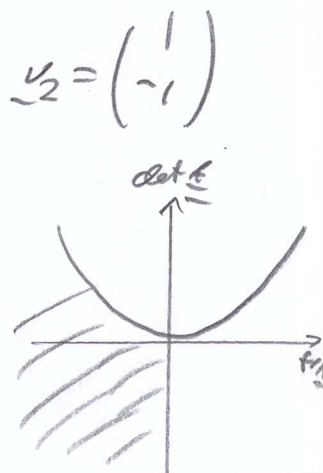


$\det A > 0$ , stabile ( $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ )



$\det A < 0$ , Sattelpunkt

$\lambda_2 < 0, \lambda_1 > 0$



"ever growing/love" hate

## 2.) Maxwell-Bloch-Gleichungen

Die Maxwell-Bloch-Gleichungen sind (dimensionslose) Ratengleichungen und beschreiben die Dynamik eines Lasers

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \kappa(P - E), \\ \dot{P} &= \gamma_1(ED - P), \\ \dot{D} &= \gamma_2(\lambda + 1 - D - EP).\end{aligned}$$

class C  
laser

Hierbei ist  $E$  das elektrische Feld der Lasermode,  $P$  die mittlere Polarisation im Medium und  $D$  die Besetzungsinversion. Der Parameter  $\kappa > 0$  ist die Photon-Verlustrate und  $\gamma_1 > 0$  und  $\gamma_2 > 0$  sind die Zerfallsraten der Polarisation bzw. der Inversion. Der Parameter  $\lambda$  stellt die Pumprate abzüglich des Schwellwerts dar und kann positiv, null oder negativ sein.

Diese Gleichungen sind äquivalent zu den Lorenz-Gleichungen und zeigen daher kompliziertes dynamisches Verhalten und insbesondere auch Chaos.

1. Finden Sie die Fixpunkte der Gleichungen und charakterisieren Sie diese (stabil/instabil, Focus/Sattel/Knoten).
2. Für viele Laser gibt es eine Zeitskalentrennung  $\gamma_1, \gamma_2 \gg \kappa$ . Damit lassen sich dann  $P$  und  $D$  adiabatisch wie folgt eliminieren. Nehmen Sie  $\dot{P} \approx 0$  und  $\dot{D} \approx 0$  an. Leiten Sie damit eine einzelne Differentialgleichung erster Ordnung für  $E$  her.
3. Finden Sie für die vereinfachte eindimensionale Gleichung die Fixpunkte  $E^*$  und deren Stabilität. Zeichnen Sie ein Bifurkationsdiagramm mit  $E^*$  in Abhängigkeit von  $\lambda$ .

1) Fixpunkte:  $\dot{E} = 0 = \dot{P} = \dot{D}$

$\Rightarrow 0 = \kappa(P - E) \Rightarrow P = E$

$0 = \gamma_1(ED - P) \Rightarrow P = ED$

$0 = \gamma_2(\lambda + 1 - D - EP) \Rightarrow D = \lambda + 1 - EP$

$$x^* = \begin{pmatrix} E^* \\ P^* \\ D^* \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda + 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

↑  
Lichtaus!

↑  
physikalisch?

Linearisierung: Jacobi-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\kappa & \kappa & 0 \\ \gamma_1 D & -\gamma_1 & \gamma_1 E \\ -\gamma_2 P & -\gamma_2 E & -\gamma_2 \end{pmatrix}$$

Betrachte 1. FP :  $E^* = P^* = 0$ ,  $D^* = 1 + \gamma$

$$\Rightarrow \underline{A} \Big|_{E^*, P^*, D^*} = \begin{pmatrix} -k & k & 0 \\ \gamma_1(\lambda+1) & -\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_2 \end{pmatrix}$$

Entwickeln  
nach 3. Zeile /  
3. Spalte

Eigenwerte bestimmen:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -k-\lambda & k & 0 \\ \gamma_1(\lambda+1) & -\gamma_1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_2-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\downarrow}{=} (-\gamma_2-\lambda) \begin{vmatrix} -k-\lambda & k \\ \gamma_1(\lambda+1) & -\gamma_1-\lambda \end{vmatrix}$$

anderes Symbol,  
weil  $\lambda$  Parameter

$$= (-\gamma_2 - \lambda) \underbrace{[(-k-\lambda)(-\gamma_1-\lambda) - k\gamma_1(\lambda+1)]}_{\stackrel{!}{=} 0}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -\gamma_2 < 0$

$$[\dots] = \lambda^2 + \lambda(k + \gamma_1) + \gamma_1 k - k\gamma_1(\lambda+1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \left( k + \gamma_1 \pm \sqrt{(k + \gamma_1)^2 + 4k\gamma_1} \right)$$

(a)  $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0 \Rightarrow$  Sattelpunkt

(b)  $0 > \lambda > -\frac{(\gamma_1 + k)^2}{4k\gamma_1} \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0 \Rightarrow$  stabiler Knoten

(c)  $-\frac{(\gamma_1 - k)^2}{4k\gamma_1} > \lambda \Rightarrow \lambda_1 < 0, \operatorname{Re} \lambda_2 < 0, \operatorname{Re} \lambda_3 < 0, \Rightarrow$  stabiler Fokus

$$\operatorname{Im} \lambda_2 = -\operatorname{Im} \lambda_3$$

2. u. 3. FP schwierig zu analysieren :  $\begin{pmatrix} E^* \\ P^* \\ D^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\lambda} \\ \pm \sqrt{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Betrachte  $\gamma_1, \gamma_2 \gg \kappa \Rightarrow \dot{P} \approx 0, \dot{D} \approx 0$  adiabatische Elimination!

$$\left. \begin{aligned} P &= ED \\ D &= \lambda H - EP \end{aligned} \right\} P = E(\lambda + 1 - EP)$$

$$\Rightarrow P(1+E^2) = E(\lambda+1) \Rightarrow P = E \frac{\lambda+1}{1+E^2}$$

$$\Rightarrow \dot{E} = \kappa(P-E) = \kappa E \left( \frac{\lambda+1}{1+E^2} - 1 \right) = \kappa E \frac{1-E^2}{1+E^2} \quad (\text{class A core})$$

Fixpunkte:  $E^* \in \{0, +\sqrt{\lambda}, -\sqrt{\lambda}\}$

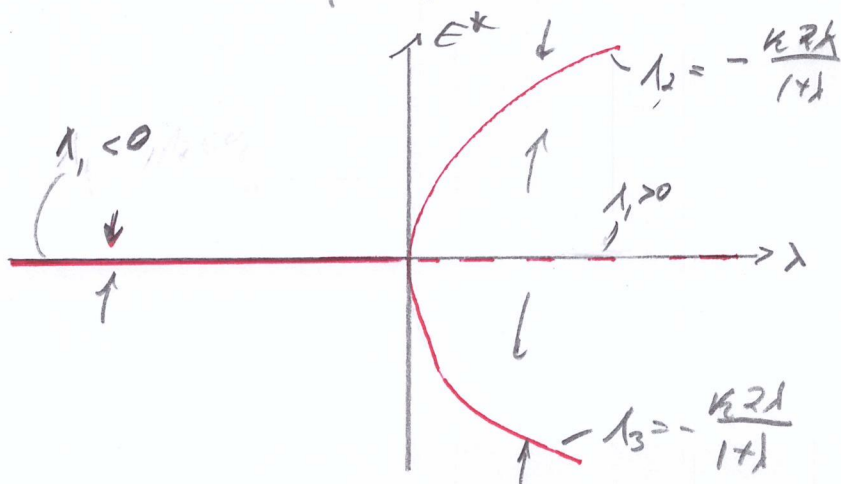
$$\begin{aligned} \text{Jacobi-Matrix: } \frac{\partial \dot{E}}{\partial E} &= \kappa \frac{1-E^2}{1+E^2} + \kappa E \left( \frac{2E}{1+E^2} - \frac{2E(1-E^2)}{(1+E^2)^2} \right) \\ &= \frac{\kappa(1 - (1+3)E^2 - E^4)}{(1+E^2)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Lambda_1(E^*=0) = \kappa \lambda$$

$$\Lambda_{2,3}(E^* = \pm\sqrt{\lambda}) = \frac{\kappa(\lambda - (\lambda+3)\lambda - \lambda^2)}{(1+\lambda)^2} = \frac{\kappa(\lambda - 2\lambda^2 - 3\lambda)}{(1+\lambda)^2}$$

ker für  $\lambda > 0$

$$= \frac{\kappa(-2\lambda)(1+\lambda)}{(1+\lambda)(1+\lambda)} = -\frac{\kappa 2\lambda}{1+\lambda}$$



## 2. Übung zur Nichtlinearen Dynamik & Strukturbildung

I

- Inhalt:
1. Besprechung des 1. Blattes
  2. Erzeugung eines dimensionslosen Modells
  3. Poincaré-Abbildung
  4. Poincaré-Bendixson-Theorem

### 1. Besprechung des 1. Übungsblatts

↳ Lösung in 5 Schritten

↳ Code - Beispiel

### 2. Erzeugung eines dimensionslosen Modells

(a) Vander Pol - Oszillator:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= y \\ \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -k(x^2 - a)y - \omega_0^2 x \end{aligned}$$

Frage: Brauchen wir wirklich 3 Parameter? ( $k, a, \omega_0$ )

Idee: Übergang zu dimensionslosen Einheiten

Bisher:  $[\dot{x}] = \frac{m}{s}$ ,  $[x] = \frac{m}{s^2}$ ,  $[\omega_0] = \frac{1}{s}$ ,  $[a] = m$

$[k(x^2 - a)\dot{x}] = \frac{m}{s^2}$  mit  $[x] = m$ ,  $[\dot{x}] = \frac{m}{s}$  folgt:  $[a] = m^2$

$\Rightarrow [(x^2 - a)\dot{x}] = m^2 \frac{m}{s} \Rightarrow [k] = \frac{1}{m^2 s}$

S: Sekunde

Ziel:  $x' = \tau$

$$\tau' = -\sqrt{k}(\tau^2 - 1)\tau - \tau$$

mit  $\tau' = \frac{d}{dt} \tau = \frac{d}{ds} \tau(s)$   
↑  
neue Zeit (dimensionslos)

Ansatz: reskalierte Zeit:  $t = t_c s$  (dimensionslos)

reskalierte Variablen:  $x(t) = x_c X(s)$

$$y(t) = y_c Y(s)$$

mit geeignet gewählten charakteristischen Faktoren  $t_c, x_c, y_c$

Einsatz liefert:

2/

$$(i) \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} \left( x_c \chi\left(\frac{t}{t_c}\right) \right) = \frac{d}{d\left(\frac{t}{t_c}\right)} \left( x_c \chi(s) \right) = \frac{x_c}{t_c} \frac{d}{ds} \chi(s) = \frac{x_c}{t_c} \chi'(s)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{x_c}{t_c} \chi'(s) = y(t) = y_c \psi(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\chi'(s) = \frac{y_c t_c}{x_c} \psi(s)}$$

$$(ii) \frac{d}{dt} y(t) = \frac{d}{dt} \left( y_c \psi\left(\frac{t}{t_c}\right) \right) = \frac{d}{d\left(\frac{t}{t_c}\right)} \left( y_c \psi(s) \right) = \frac{y_c}{t_c} \frac{d}{ds} \psi(s) = \frac{y_c}{t_c} \psi'(s)$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = \frac{y_c}{t_c} \psi'(s) = -k \left( x(t)^2 - a \right) y(t) - \omega_0^2 x(t)$$

$$= -k \left( x_c^2 \chi\left(\frac{t}{t_c}\right)^2 - a \right) y_c \psi\left(\frac{t}{t_c}\right) - \omega_0^2 x_c \chi\left(\frac{t}{t_c}\right)$$

$$= -k x_c^2 y_c \left( \chi(s)^2 - \frac{a}{x_c^2} \right) \psi(s) - \omega_0^2 x_c \chi(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi'(s) = -k x_c^2 t_c \left( \chi(s)^2 - \frac{a}{x_c^2} \right) \psi(s) - \omega_0^2 \frac{x_c t_c}{y_c} \chi(s)}$$

Komplizierter als zuvor? Nicht wirklich, denn wir wählen jetzt  $t_c, y_c$  geschickt (so dass die Gleichungen vereinfacht einfache werden)

$$\left. \begin{array}{l} \text{etwa so: } \frac{a}{x_c^2} = 1 \quad (\text{gibt weil } a > 0) \\ \frac{y_c t_c}{x_c} = 1 \quad \text{und} \quad \omega_0^2 \frac{x_c t_c}{y_c} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dazu vorgehen} \\ \text{wir den Rest in} \\ \text{einem } \tilde{k}\text{-Parameter} \end{array}$$

$$\Rightarrow x_c = \sqrt{a}, \quad t_c = \frac{1}{\omega_0}, \quad y_c = \sqrt{a} \omega_0$$

Skalierung wegen  
Reskalierung von  $x$

Skalierung wegen  
dieser Parameterzeit

$$\Rightarrow \chi(s) = \psi(s)$$

$$\psi'(s) = -k x_c^2 t_c \left( \chi(s)^2 - 1 \right) \psi(s) - \chi(s)$$

$$=: \tilde{k} = k a$$

$$\text{check: } [\tilde{k}] = \frac{1}{\text{m}^2 \text{sec}} \cdot \frac{1}{\text{s}^2} = 1$$

Abschreiben mit gewählten Variablen/Parametern:

über  $(x \rightarrow X, y \rightarrow Y, s \rightarrow t, k \rightarrow K)$

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = -K(X^2 - 1)Y - X \end{cases}$$

(b) Josephson junctionen: Tunneln zwischen 2 Supraleitern (1973 Nobelpreis)  
 siehe Strogatz-Buch S. 109 ff

$$\frac{\hbar C}{2e} \ddot{\phi} + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\phi} + I_c \sin \phi = I \quad (\Leftrightarrow C\dot{V} + \frac{V}{R} + I_c \sin \phi = I)$$

$$\frac{\psi_1 e^{i\phi_1}}{\psi_2 e^{i\phi_2}}$$

$\phi = \phi_2 - \phi_1, \quad I_c \sin \phi = I$  (Strom-Phase-Beziehung)  
 $\dot{\phi} = 0, \text{ RP!}$

$I_c > I$ : Spannungs-Phase-Beziehung:  $V = \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi}$  (phase slip)  
 ↑  
 Spannung über die Barriere

(Analogie zu gedämpfter Pendel:  $m\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \cos \theta = \Gamma$ )  
 gedämpft

Dimensionslose Einheitsform:  $\phi(t) = x_c \gamma(s)$   
 $t = t_c s$

$$\Rightarrow \dot{\phi}(t) = \frac{d}{dt} \phi(t) = \frac{x_c}{t_c} \frac{d}{ds} \gamma(s) = \frac{x_c}{t_c} \gamma'(s)$$

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{x_c^2}{t_c^2} \gamma''(s)$$

Einsetzen in Gleichung:

$$\Rightarrow \frac{\hbar C}{2e} \frac{x_c^2}{t_c^2} \gamma''(s) + \frac{\hbar}{2eR} \frac{x_c}{t_c} \gamma'(s) + I_c \sin \gamma(s) = I \quad | : I_c$$



Wähle:  $x_c = 1$  und  $\frac{h}{2eR I_c} \frac{x}{t_c} = 1 \Rightarrow \frac{1}{t_c} = \frac{2eR I_c}{h}$

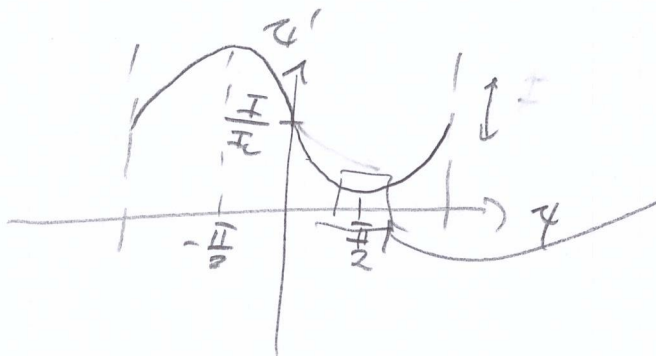
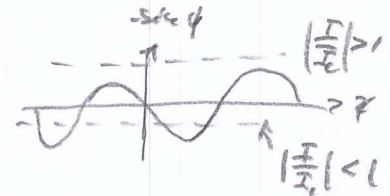
$$\Rightarrow \frac{hC}{2eI_c} \left( \frac{2eR}{h} \right)^2 \varphi''(s) + \varphi'(s) + \sin \varphi(s) = \frac{I}{I_c}$$

$$= \frac{2CeR^2 I_c}{h} =: \beta \quad (\text{McClelland-Parameter, dimensionlose Kapazität})$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta \varphi'' + \varphi' + \sin \varphi = \frac{I}{I_c}}$$

Betrachte:  $|\beta| < 1 \Rightarrow \varphi' = \frac{I}{I_c} - \sin \varphi$  (cf. Aufg. 4)

FP für  $\varphi' = 0 \Rightarrow \varphi^* = \arcsin \frac{I}{I_c}$

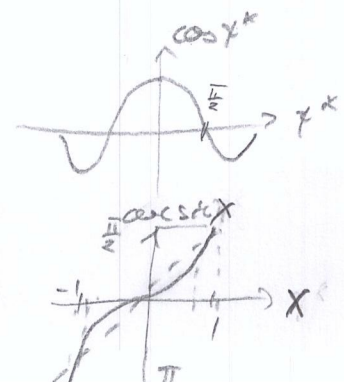
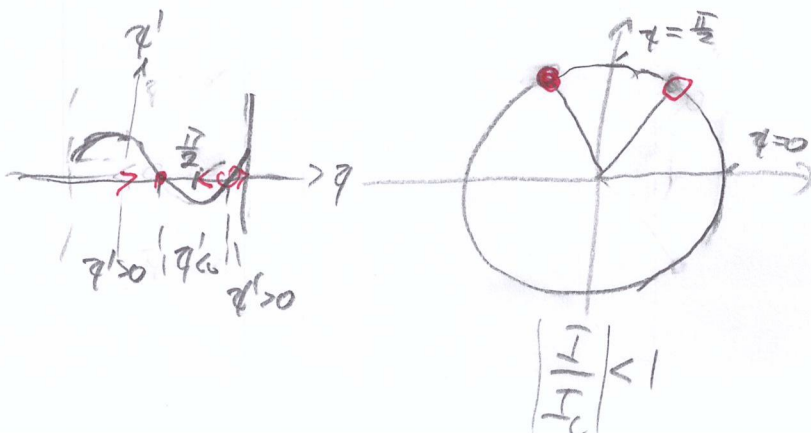


ggt Sattel-Knoten-Bifurkation

$$\left( \sin^2 \varphi^* + \cos^2 \varphi^* = 1 \Rightarrow \left( \frac{I}{I_c} \right)^2 + \cos^2 \varphi^* = 1 \right)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \varphi' = -\cos \varphi^* \Rightarrow \cos \varphi^* = \pm \sqrt{1 - \left( \frac{I}{I_c} \right)^2}$$

$$= \mp \sqrt{1 - \left( \frac{I}{I_c} \right)^2} \Rightarrow \frac{d}{d\varphi} \varphi' \begin{cases} < 0 \text{ für } -\sqrt{1 - \left( \frac{I}{I_c} \right)^2} \text{ stabil} \\ > 0 \text{ für } +\sqrt{1 - \left( \frac{I}{I_c} \right)^2} \text{ instabil} \end{cases}$$



andere Wahl von  $t_c$ :  $\cos I = \bar{I}$

$$t = t_c s \quad \text{mit} \quad t_c = \sqrt{\frac{h c t_c}{2 e I_c}}$$

$$\frac{h c}{2 e I_c} \frac{1}{\sqrt{\frac{h c t_c}{2 e I_c}}} \varphi'' + \frac{h}{2 e I_c} \frac{1}{\sqrt{\frac{h c t_c}{2 e I_c}}} \varphi' + \sin \varphi = \frac{I_B}{I_c}$$

$$\Rightarrow \varphi'' + \sqrt{\frac{h}{2 e I_c R^2 c}} \varphi' + \sin \varphi = \frac{I_B}{I_c}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi'' + d \varphi' + \sin \varphi = I}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \varphi' &= Y \\ Y' &= I - \sin \varphi - d Y \end{aligned}}$$

Fixpunkt:  $Y^* = 0$ ,  $\sin \varphi^* = I$ , falls  $|I| < 1$

$$\Rightarrow \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \varphi^* & -d \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \cos \varphi^* = \pm \sqrt{1 - I^2}$$

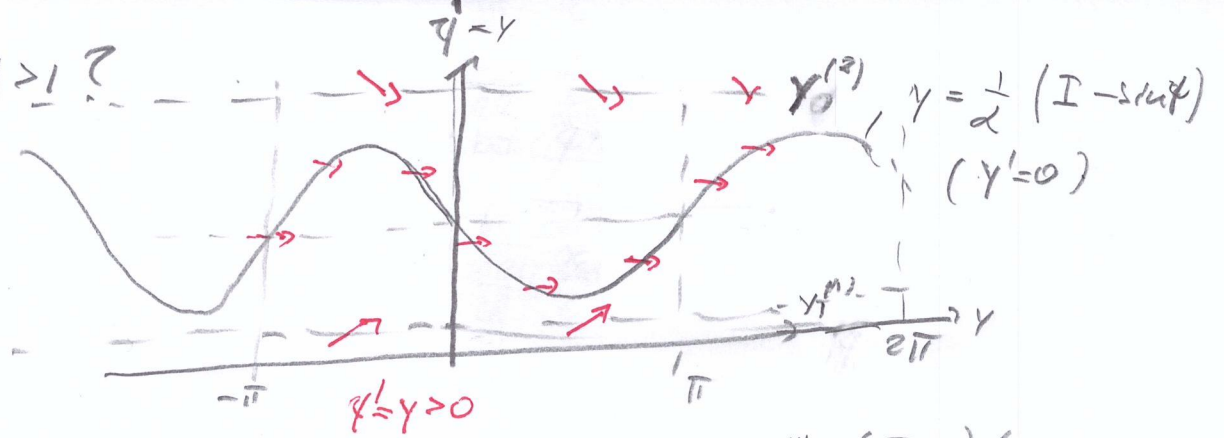
$$\Rightarrow \text{tr} \underline{A} = -d < 0$$

$$\det \underline{A} = \cos \varphi^* = \pm \sqrt{1 - I^2} \quad \left. \vphantom{\det \underline{A}} \right\} (\text{tr} \underline{A})^2 - 4 \det \underline{A} = d^2 \mp 4 \sqrt{1 - I^2}$$

$\Rightarrow$  Stabilität Knoten für  $d^2 - 4 \sqrt{1 - I^2} > 0$   
 $\Rightarrow$  Stabilität Sattelpunkt oder I=1  
 Stabilität Fokus für  $d^2 + 4 \sqrt{1 - I^2} < 0$

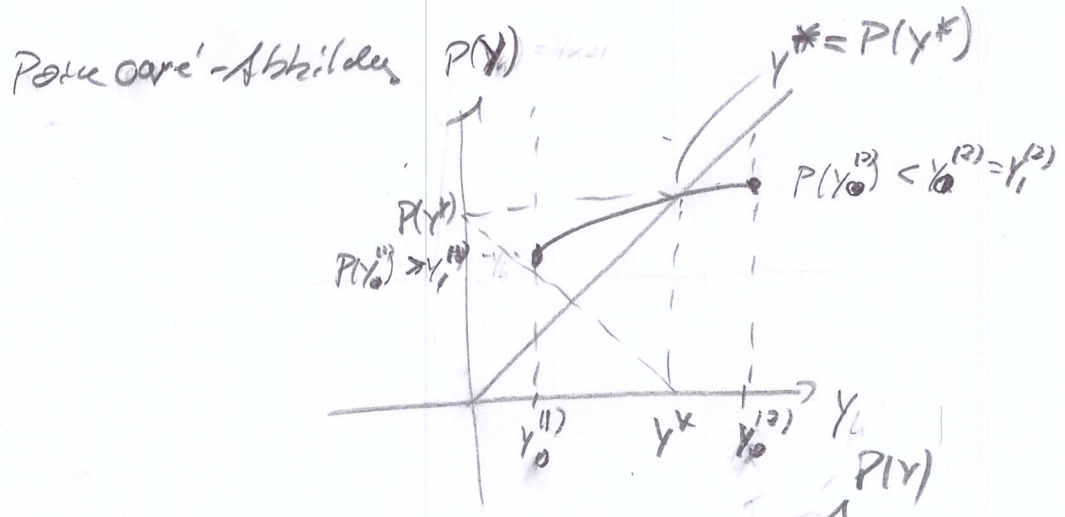
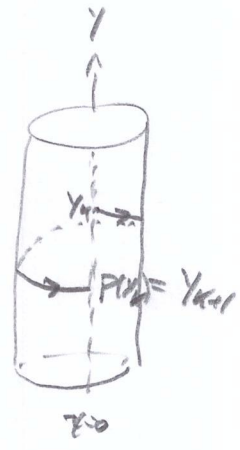
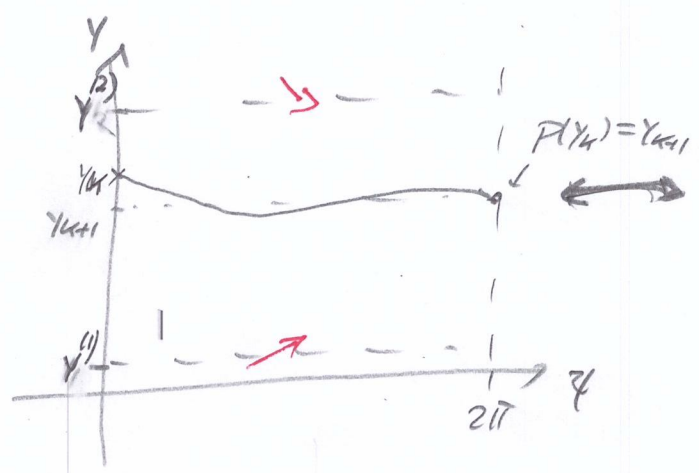
Sattelpunkt für  $d^2 < 0$  ( $\cos \varphi^* = -\sqrt{1 - I^2}$ )

Fall  $|I| > 1$  ?



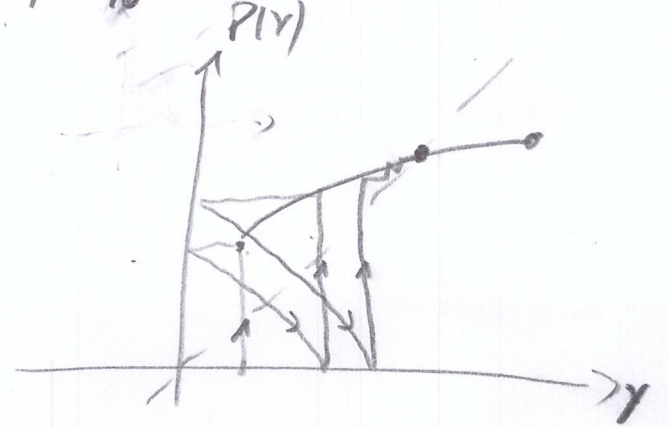
Betrachte  $y^{(1)} \leq y \leq y^{(2)}$  mit  $0 < y^{(1)} < (I-1)/d$   
 $\frac{I+1}{d} < y^{(2)}$

$\Rightarrow$  Trajectories at  $\varphi \in [0, 2\pi]$

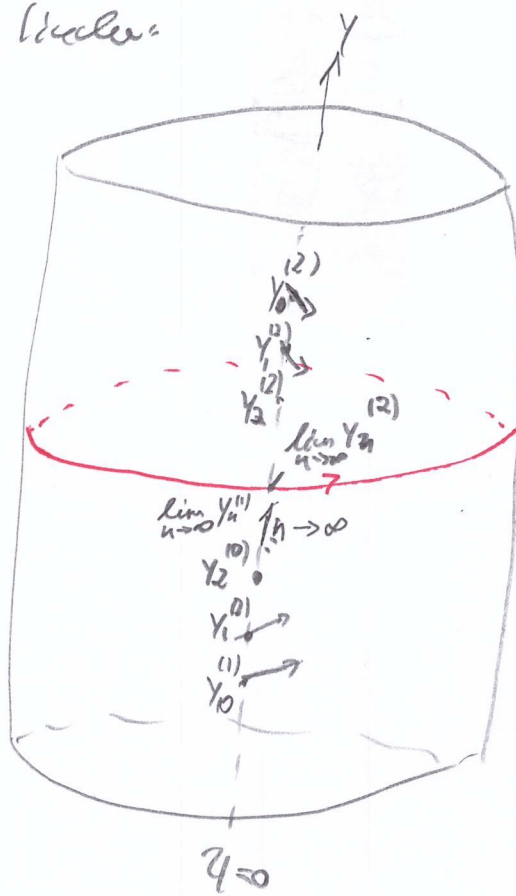


$P(y_0^{(1)}) > y_0^{(1)} \Rightarrow$  nach oben

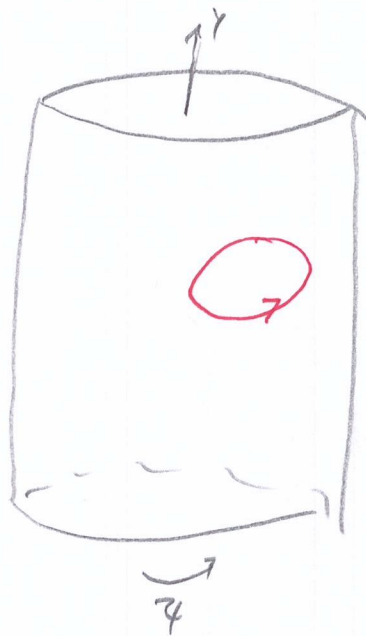
$P(y_0^{(2)}) < y_0^{(2)} \Rightarrow$  nach unten



Auf dem Zylinder:



Achtung:



möglicherweise kein  
Grenzwert?  
→ nicht hier ( $|H| > 1$ ), weil  
kein Fixpunkt existiert

Bemerkung: Eindeutigkeit auch gegeben!

Strogatz S 292 per Energiemoment

$$E = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \cos \varphi \Rightarrow \Delta E = 0 \text{ nach 1 Rotation } \int_0^{2\pi}$$

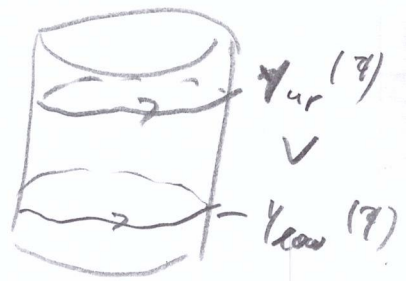
$$\Rightarrow \Delta E = \int_0^{2\pi} \frac{dE}{d\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} + \sin \varphi \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( I - \cancel{\sin \varphi} - \cancel{d\varphi} + \cancel{\sin \varphi} \right) d\varphi$$

also:  $\int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) d\varphi = \frac{2\pi \bar{\gamma}}{d} \quad (*)$

8

für



folgt  $\int_0^{2\pi} \gamma_{ur}(\varphi) d\varphi > \int_0^{2\pi} \gamma_{low}(\varphi) d\varphi$

(\*) gilt nur für  
einen Fall  $(\gamma(\varphi))$

# 3. Übung zur Nichtlinearen Dynamik & Strukturbildung

7

- Inhalt:
1. Besprechung des 2. Blattes
  2. Lorenz-Modell (revisited)
  3. Diskrete Abbildungen

## 1. Besprechung des 2. Übungsblattes

- ↳ Lösung in Fasschnitten
- ↳ Code-Beispiel

## 2. Lorenz-Modell (revisited)

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

S. Edward N. Lorenz:

Deterministic nonperiodic flow

J. Atmospheric Sciences 20, 130 (1963)

Chaos für  $\sigma=10$ ,  $\beta=\frac{8}{3}$ ,  $\rho=28$  (vgl. 2. Vorlesung)

Fixpunkte:  $C_0 = (0, 0, 0)$

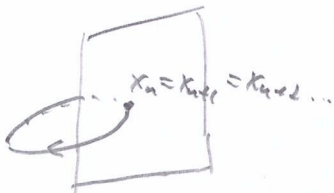
$$C_{\text{sid}} = (\pm \sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$$

Stabilität + Eigenvektoren s. 3. Übungsblatt

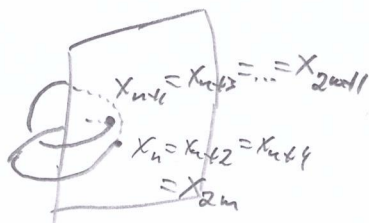
## 3. Diskrete Abbildungen

dynamisches System:  $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t))$ ,  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

Potcarané-Abbildung:  $\underline{f} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\underline{f} : \underline{x}_n \mapsto \underline{f}(\underline{x}_n) = \underline{x}_{n+1}$



Periodische Orbit von  $\underline{F} \iff$  Fixpunkt von  $\underline{f}$



Periodenverdopplung in  $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}) \iff$  Periodische Lösung in  $\underline{f}$

• Lineare Stabilitätsanalyse:

$$x^* = f(x^*) \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n = x^*$$

Abweichung von  $x^*$ :  $x_n = x^* + \delta x_n$

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(x^* + \delta x_n) \approx \underbrace{f(x^*)}_{=x^*} + \underbrace{Df(x^*)}_{=f'(x^*)} \delta x_n$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x_{n+1} - x^*}_{\delta x_{n+1}} \approx f'(x^*) \delta x_n$$

$$\Rightarrow \delta x_{n+1} \approx f'(x^*) \delta x_n$$

wächst für  $|f'(x^*)| > 1 \Leftrightarrow |\lambda| > 1$   
nimmt ab für  $|f'(x^*)| < 1 \Leftrightarrow |\lambda| < 1$

$$f'(x^*) = \lambda \text{ (Eigenwert von } Df(x^*))$$

Vgl. Dgl-System:  $Re(\lambda) < 0$  entscheidend!

• Periodischer Orbit / Lösung von  $x_{n+1} = f(x_n)$ :

Periode 1:  $x_{n+1} = f(x_n) = x_n$  (Fixpunkt, s.o.)

Periode 2:  $x_{n+2} = f(x_{n+1}) = f(f(x_n)) = f^{(2)}(x_n) = x_n$

⋮

Periode p:  $x_{n+p} = f(x_{n+p-1}) = f(f(x_{n+p-2})) = \dots = f^{(p)}(x_n) = x_n$

$\Rightarrow$  Periodischer Orbit mit Periode p ist Fixpunkt der p-fach iterierten Abbildung:  $x^* = f^{(p)}(x^*)$

• Lyapunov-Exponent

Betrachte Wachstum einer kleinen Störung:

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \frac{|\delta x_k|}{|\delta x_0|}$$

$\|\cdot\|$ : Norm & hier  $|\cdot|$

Präziser:  $\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \left[ \frac{1}{k} \sup_{\|\delta x_0\| \rightarrow 0} \ln \frac{\|\delta x_k\|}{\|\delta x_0\|} \right]$   
Differenzquotient

Necessarisch:  $\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln |f'(x_k)| \approx \ln |f'|$   
Mittelwert von  $\ln |f'|$   
(Lagrange-Mittelwertsatz)

Bsp: (i) logistische Abbildung:

3

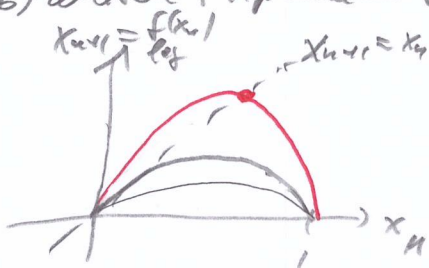
$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) = f_{\log}(x_n), \quad r \in [0, 4] \text{ für } x_n \in [0, 1]$$

$f_{\log}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

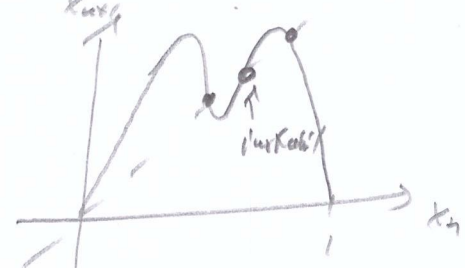
→ Fixpunkte: (a) trivialer Fixpunkt  $x^* = 0$

Achtung!  $x_n = 1$  kein Fixpunkt:  $f(1) = 0$

(b) weitere Fixpunkte für  $r > 1$ : Steigung bei  $x_n = 0$

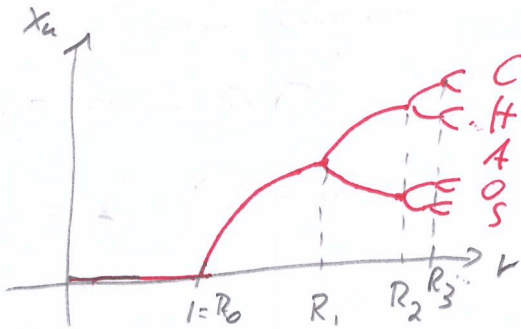


(c)



Höhere Zinsen S. Jupiter-notebook

Bifurkationsdiagramm:



Freigegeben - Kostenfeste:

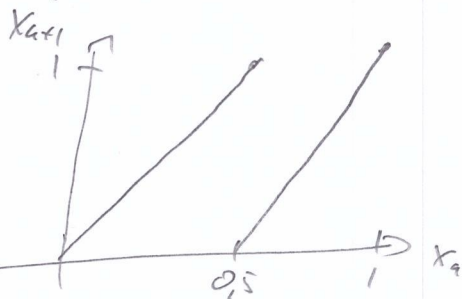
$$S_n = \frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n} = 1,669...$$

(ii) Bernoulli-Abbildung

$$f_B: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$x_{n+1} = f_B(x_n) = (a x_n) \bmod 1 \Rightarrow \text{kein schönes Bifurkationsdiagramm!}$$

Speicherwert:  $a=2$



$$f_B(x_n; a=2) = 2x_n - \lfloor 2x_n \rfloor$$

↑  
Floor-Funktion

Symbolische Dynamik

|              |                     |           |
|--------------|---------------------|-----------|
|              | $a_0 = 0$           | $a_1 = 1$ |
| 1. Bit $a_1$ | -----               |           |
| 2. Bit $a_2$ | 0  -----  1         |           |
| 3. Bit $a_3$ | 0   1   0  -----  1 |           |

$$x_0 = \sum_{p=1}^{\infty} a_p 2^{-p} \hat{=} (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

$$x_1 = f(x_0) = \left( \sum_{p=1}^{\infty} a_p 2^{-p+1} \right) \bmod 1 \hat{=} (a_2, a_3, \dots)$$

1. Bit gelöscht! → bitshift map



Refraktive Zahlen mit periodischen Binärfolgen

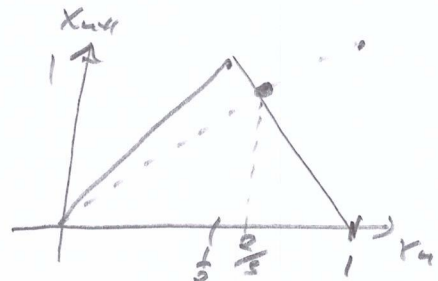
↳ periodische o.b.f.s von  $f_B$

- Bsp:  $x_0 = 0.4 \cong 0,01100110$
- $x_1 = 0.8 \cong 0,11001100$
- $x_2 = 0.6 \cong 0,1001101$
- $x_3 = 0.2 \cong 0,0011011$
- $x_4 = 0.4 \cong 0,0110110$

Kleinste Unterschiede (nicht laute Stelle) werden (expandiert) vergrößert  
( $\log_2(\text{diff.}) < \log_2(\text{expand}) > 1$ )

(iii) Zelt-Abbildung / tent map

$$f_{\text{tent}} : [0,1] \rightarrow [0,1]$$
$$f_{\text{tent}} = \begin{cases} 2x_n & \text{für } x_n \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2-2x_n & \text{für } x_n \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



Fixpunkte:  $x^k = 0, x^k = \frac{2}{3} = 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}$

Kleinste Unterschiede werden beliebig vergrößert in  $[0,1]$  abgebildet (für hinreichend große  $n$ ).

# 4. Übung zur Nichtlinearen Dynamik & Streckenbildung

I

Inhalt: 1. Besprechung des 3. Blattes

2. Henon - Abbildung

3. OGY - revisita

(4. Delay Embedding)

1. Besprechung des 3. Übungsblatts

↳ Lösung in Abschnitten

↳ Code - Beispiel

2. Henon - Abbildung

$$\text{I: } X_{n+1} = a - X_n^2 + b Y_n$$

$$\text{II: } Y_{n+1} = X_n$$

Vgl. Wiki

$$\text{I} \quad \tilde{X}_{n+1} = 1 - \alpha \tilde{X}_n^2 + \tilde{Y}_n$$

$$\text{II} \quad \tilde{Y}_{n+1} = \beta \tilde{X}_n$$

Frage:  $X_n \leftrightarrow \tilde{X}_n, Y_n \leftrightarrow \tilde{Y}_n, a \leftrightarrow \alpha, b \leftrightarrow \beta$  ?

aus I  $\leftrightarrow$  II folgt:  $\frac{1}{a} X_{n+1} = 1 - \frac{1}{a} X_n^2 + \frac{b}{a} Y_n$

$$\Rightarrow \tilde{X}_{n+1} \Rightarrow \boxed{X_n = a \tilde{X}_n}$$

$$\Rightarrow \tilde{X}_{n+1} = 1 - \frac{1}{a} (a \tilde{X}_n)^2 + \frac{b}{a} Y_n$$

$$= 1 - a \tilde{X}_n^2 + \frac{b}{a} Y_n$$

$$(a = \alpha)$$

Weiter mit  $Y_n = \frac{b}{a} Y_n \Rightarrow \boxed{Y_n = \frac{a}{b} \tilde{Y}_n}$

$$\tilde{X}_{n+1} = 1 - \alpha \tilde{X}_n^2 + \tilde{Y}_n$$

und aus II:  $Y_{n+1} = X_n$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \tilde{Y}_{n+1} = a \tilde{X}_n$$

$$\Leftrightarrow \tilde{Y}_{n+1} = b \tilde{X}_n$$

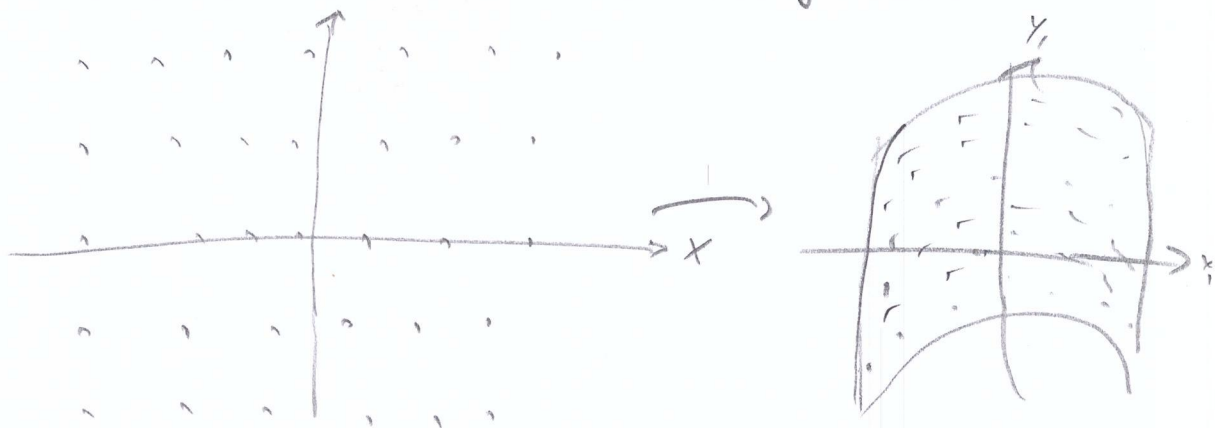
$$(b = \beta)$$

$\Rightarrow$  Parameter gleich, Variablen reskaliert.

↳ Coding - Beispiel

Die Komposition der Kehru-Abbildung:

1) Transformation:  $(x_1, y_1) = (x, \underbrace{1 - ax^2 + y}_{\text{Deformation}})$



2) Kontraktion in x-Richtung:

$$(x_2, y_2) = (bx_1, y_1)$$



3) Reflexion / Spiegelung an der Diagonalen:  $y = x$

$$(x_3, y_3) = (y_2, x_2)$$



$$(x_3, y_3) = (y_2, x_2) = (y_1, bx_1) = (1 - ax^2 + y, bx)$$

### 3 OGY - revisited

Edward Ott, Celso Grebogi, James Yorke, Controlling Chaos  
PRL 64, 1196 (1990)

#### 1. Motivation

- Chaotisches System soll kontrolliert werden
- Zugänglicher Systemparameter wird zeitlich um einen kleinen Wert verändert  $\Rightarrow$  Stabilisierung eines periodischen Orbits

#### 2. Was soll stabilisiert werden?

- strange attractor / seltsamer Attraktor enthält  $\infty$ -viele periodische Orbits
- Ziel: System nur wenig verändern für Stabilisierung

#### 3. Annahme: zur Vereinfachung: 3D-System (gibt auch höher)

$$\frac{d}{dt} \underline{x} = \underline{F}(\underline{x}, p) \quad , \underline{x} \in \mathbb{R}^3$$

$\uparrow$   
Systemparameter zu verändern

#### 4. Anwendung auf Experimente:

- gibt auch, wenn Dynamik nicht gänzlich bekannt
- etwa nur 1 Variable  $\rightarrow$  Delay-Embedding:

$$\underline{x}(t) = \left( z(t), \underbrace{z(t-T), z(t-2T), \dots, z(t-NT)}_{\text{spannt Phasenraum auf}} \right)$$

$\uparrow$   
gemessen

#### 5. Systemparameter:

- $p$  kann in kleinen Bereich variiert werden o. B. L. T.:  $p_0 = 0$   
-  $p_x < p_0 < p_x$

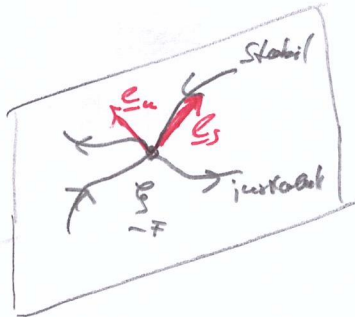
#### 6. Poincaré - Schnitt

3D-DGL  $\rightarrow$  2D-Abbildung (zeitliche diskret)

periodischer Orbit  $\leftrightarrow$  Fixpunkt

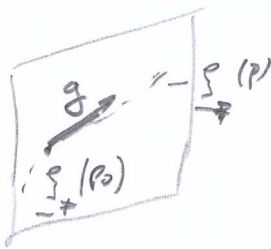
7a Benötigtes Wissen über Fixpunkt:

- $\xi_{-T}$  sei der Ziel-Fixpunkt
- $\xi_{-T}$  ist Sattel:



lin. bzw. nichtlin. Eigenwerte  
 $\lambda_u, \lambda_s, \dots, \lambda_n$   
 instabil  $\uparrow$  stabil  
 $|\lambda_u| > 1 > |\lambda_s|$

7b Wie verschiebt sich der FP, wenn P verändert wird?



$$\underline{g} := \left. \frac{\partial \xi_{-T}(P)}{\partial P} \right|_{P_0}$$

$$\approx \frac{1}{P} \xi_{-T}(P)$$

Richtungsableitung

8 Duale Vektoren:

- $\underline{e}_u, \underline{e}_s$  sind nicht unbedingt orthogonal.

• Duale Basis  $\underline{f}_u, \underline{f}_s$  mit  $\underline{f}_u \cdot \underline{e}_u = 1$   $\underline{f}_u \cdot \underline{e}_s = 0$   
 $\underline{f}_s \cdot \underline{e}_u = 0$   $\underline{f}_s \cdot \underline{e}_s = 1$

allgemein:  $\underline{v} = \alpha \underline{e}_u + \beta \underline{e}_s \Rightarrow \alpha = \underline{f}_u \cdot \underline{v}, \beta = \underline{f}_s \cdot \underline{v}$

9 Wie verhält sich  $\xi_{-T}$  in der Nähe von  $\xi_{-T}$  für kleine P um  $P_0$ ?

$$(1) \xi_{-T} \approx \underbrace{P_n \xi}_{\text{Lage d. verschobener FP}} + \underbrace{[\lambda_u \underline{e}_u \underline{f}_u + \lambda_s \underline{e}_s \underline{f}_s]}_{\underline{M}: \text{Linearisierung}} (\xi_n - P_n \xi)$$

10 + 11 + 12: OGT-Kontrolle:

• Idee: Wähle  $P_n$ , so dass  $\xi_{-T}$  auf stabiler Mannigfaltigkeit liegt.  
 $\underline{f}_u \cdot \xi_{-T} = 0$

$$\Rightarrow \underline{f}_u \cdot \xi_{-T} = P_n \underline{f}_u \cdot \xi + [\lambda_u \underbrace{\underline{f}_u \cdot \underline{e}_u}_{=1} \underline{f}_u + \lambda_s \underbrace{\underline{f}_u \cdot \underline{e}_s}_{=0} \underline{f}_s] (\xi_n - P_n \xi)$$

$$0 = P_n \underline{f}_u \cdot \xi + \lambda_u \underline{f}_u \cdot (\xi_n - P_n \xi)$$

$$P_n (\lambda_u - 1) \underline{f}_u \cdot \xi = \lambda_u \underline{f}_u \cdot \xi_n \Rightarrow (2) P_n = \frac{\lambda_u}{1 - 1} \frac{\underline{f}_u \cdot \xi_n}{\underline{f}_u \cdot \xi}$$

### 13 Kontrollbedingen

- Aussage zw, wenn (1)  $\underline{f}_u$  nahe genug an  $\underline{f}_x$  liegt &

$$\underline{f}_u^u = \underline{f}_u \cdot \underline{p}_u$$

$$\hookrightarrow \left| \underline{f}_u \cdot \underline{p}_u \right| < \underline{f}_x \quad (\text{links } \delta)$$

$$\text{mit } \underline{f} = P_x \left| (1 - \lambda_u^{-1}) \underline{f}_u \cdot \underline{g} \right|$$

$$\text{und } -P_x < P_u < P_x$$

$$\left| (1 - \lambda_u^{-1}) \right| = \left| \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \right|$$

### (4. Delay Embedding)

Rekonstruktion eines dynamischen Systems  $\dot{x} = F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$

über zeitverzögerte Koordinaten ( $\rightarrow$  Attraktor sichtbar durch):

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_u(t) \\ x_u(t-T) \\ \vdots \\ x_u(t-NT) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} N \in \{1, \dots, n\} \text{ oder auch Kombination} \\ \text{von verschiedenen Verzögerungen} \end{array}$$

$\rightarrow$  Takens Theorem:  $M > 2d$  ( $d$ : fraktale Hausdorff Dimension)

Inhalt: 1. Besprechung des 4. Blattes

2. Komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung

↳ Benjamin-Feir-Instabilität

3. Fitzhugh-Nagumo-Modell

4. Schlögl-Modell

1. Besprechung des 4. Blattes

↳ Lösung in Ausschnitt

↳ Code Beispiel

2. Komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung

$$1D: \frac{\partial}{\partial t} W(x,t) = W(x,t) - (1 + ic_2) |W(x,t)|^2 W(x,t) + (1 + ic_1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,t)$$

uniforme/konvergente Oszillationen:  $Q=0$

aus allgemeiner Ansatz für ebene Wellen:  $W(x,t) = \alpha_Q \exp[i(\omega_Q t + \alpha x)]$

mit  $|\alpha_Q|^2 = 1 - Q^2$  und  $\omega_Q = -c_2 + (c_2 - c_1) Q^2$  folgt:

$$|\alpha_0|^2 = 1, \omega_0 = -c_2$$

$$\Rightarrow \text{Störung: } W \approx [1 + u(x,t)] e^{i\omega_0 t}$$

Ersatz in linearisierten Näherung:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -(1 + ic_2)(u + u^*) + (1 + ic_1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$$

Weiter mit Fourier-Transformation:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dq u_q(t) e^{iqx}, \quad u^*(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dq u_q^*(t) e^{-iqx}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_q}{\partial t} = -(1 + ic_2)(u_q + u_q^*) - (1 + ic_1) q^2 u_q$$

$$\text{und } \frac{\partial u_q^*}{\partial t} = -(1 - ic_2)(u_q + u_q^*) - (1 - ic_1) q^2 u_q^*$$

## 2. Fitzhugh-Nagumo Modell

$$\varepsilon \dot{u} = u - \frac{u^3}{3} - v$$

$$\dot{v} = u + a$$

Aktivator (Schnell)

Inhibitor (Langsam)

$a$ : Bifurkationsparameter

$\varepsilon$ : Zeitskalentrennung  $\varepsilon \ll 1$

Siehe Blatt 5

History of FHN

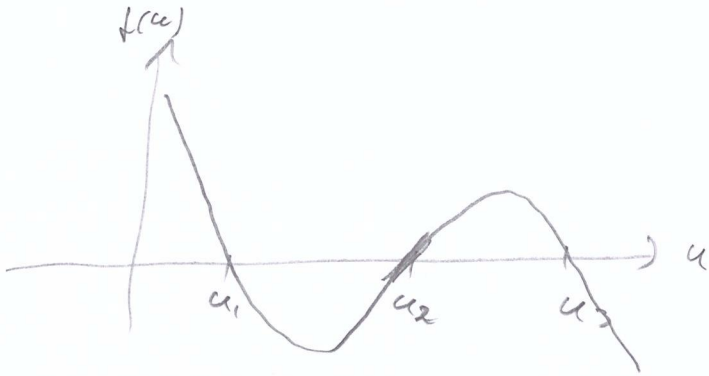
from Papers!



#### 4. Schlögl-Modell:

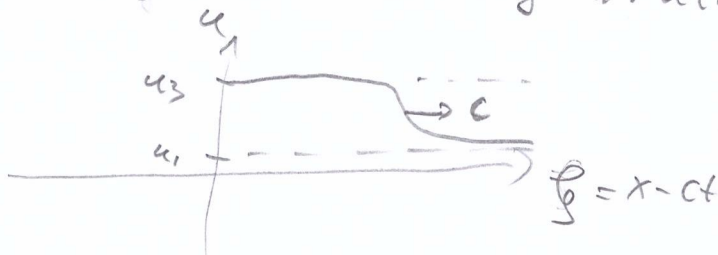
Dyffusion mit Reaktionen  $u(x,t)$  gegeben durch  $\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = f(u) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$

mit  $f(u) = k(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)$



Gerade Linie des Geraden

Mit bewegtes Koordinatensystem:  $u(x,t) = u(\underbrace{x-ct}_{=\xi}) = u(\xi)$



$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial (-ct)} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \mapsto -c \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \mapsto \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = f(u) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

$$-c u'(\xi) = f(u(\xi)) + D \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\xi)$$

$$u(\xi \rightarrow \pm \infty) = \begin{cases} u_1 \\ u_3 \end{cases} \quad \text{und} \quad \left. \frac{du}{d\xi} \right|_{\pm \infty} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du}{d\xi} = \beta (u-u_1)(u-u_3) - \dots$$

$$\frac{d\beta}{ds^2} = \frac{d}{ds} (\beta(u-u_1)(u-u_3)) = \beta \frac{d}{ds} (u^2 - u(u_1+u_3) + u_1u_3)$$

$$= \beta [2uu' - u'(u_1+u_3)]$$

$$= 2\beta u (\beta(u-u_1)(u-u_3)) - \beta (u-u_1)(u-u_3)(u_1+u_3)$$

$$\Rightarrow = (u-u_1)(u-u_3) [2\beta^2 u - \beta^2 (u_1+u_3)]$$

$$\rightarrow 0 = C u' + D u^2 + f(u)$$

$$= (u-u_1)(u-u_3) [C\beta + D 2\beta^2 u - D\beta^2 (u_1+u_3) - k(u-u_2)]$$

$$= (u-u_1)(u-u_3) [C\beta - \beta^2 D (u_1+u_3) - k u_2 + u(D 2\beta^2 - k)]$$

$u = u_1$  und  $u = u_3$  Nullstellen!

3. Nullstelle:  $[...] = 0$

$$\Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{k}{2D}} \Rightarrow C \sqrt{\frac{k}{2D}} - \frac{k}{2D} D (u_1+u_3) - k u_2 = 0$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{\frac{Dk}{2}} (u_1+u_3 - 2u_2)$$

$$u(\beta) = \frac{1}{2} [u_1+u_3 + (u_1-u_3) \operatorname{tanh} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{2D}} (u_3-u_1) \xi \right)]$$

# 6. Übung zur Nichtlinearen Dynamik & Strukturbildung

- Inhalt:
1. 5. Übungsblatt
  2. Brusselator - Modell revidieren
  3. Chaos des Wasserrad
  4. Freie Rotationen eines starren Körpers

1. 5. Übungsblatt
  - ↳ Lösung zu Hausaufgaben

2. Brusselator - Modell revidieren (S. VL 13)

Zunächst ohne Diffusion:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= A - Bu + u^2 v - u \\ \frac{dv}{dt} &= Bu - u^2 v \end{aligned} \right\} \Leftarrow \begin{aligned} A &\rightarrow u \\ B+u &\rightarrow v+d \\ 2u+v &\rightarrow 3u \quad (\text{autokatalytisch}) \\ u &\rightarrow e \end{aligned}$$

Bestimme Fixpunkt & Stabilität:

$u=0$  und  $v=0 \Rightarrow$  (i)  $0 = u^*(B - u^*v^*) \Rightarrow v^* = \frac{B}{u^*}$   
 $u=0$  ist kein FP wegen  $\frac{dv}{dt} = A$   $\Big|_{u=0}$

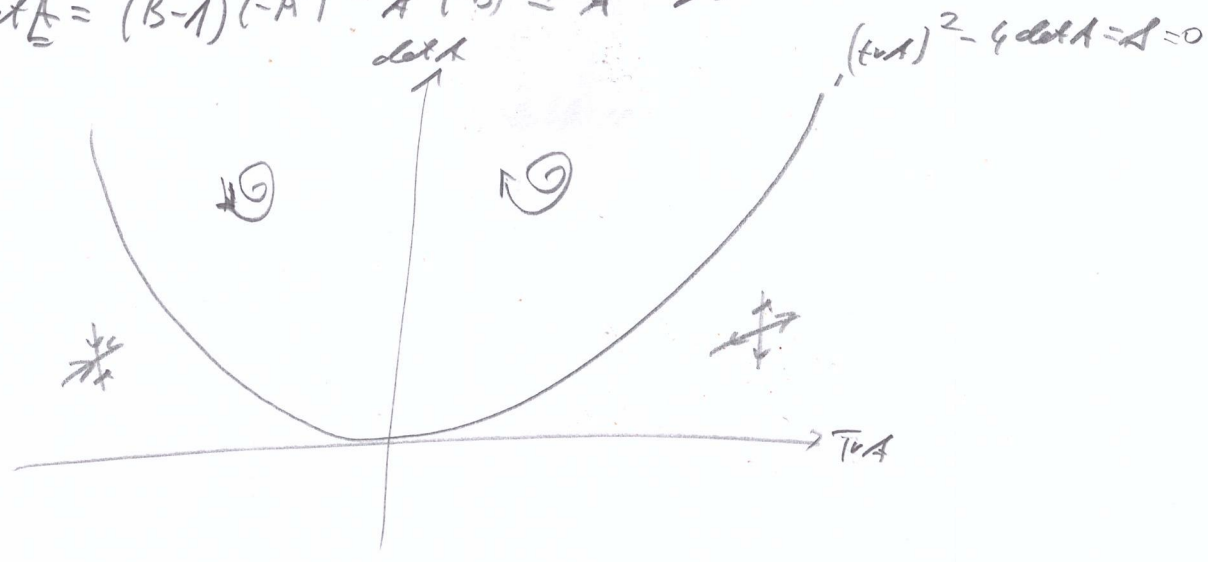
(ii)  $\dot{u}=0 \Rightarrow 0 = A - Bu^* + (u^*)^2 v^* - u^*$   
 $= A - \underbrace{Bu^* + u^* \cdot \frac{B}{u^*}}_{=0} - u^*$   
 $\Rightarrow u^* = A \Rightarrow v^* = \frac{B}{A}$

Stabilität: Jacobi-Matrix:

$$J = \begin{pmatrix} -B + 2u^*v^* - 1 & (u^*)^2 \\ B - 2u^*v^* & -(u^*)^2 \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{u^*=A \\ v^*=\frac{B}{A}}} = \begin{pmatrix} B-1 & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix}$$

$\text{Spur } \underline{A} = \text{tr } \underline{A} = B - 1 - A^2$

$\det \underline{A} = (B-1)(-A^2) - A^2(-B) = A^2 > 0$



$\Delta = (B-1-A^2)^2 - 4A^2 = (B-1)^2 - 2(B-1)A^2 + A^4 - 4A^2$

Eigenwerte:

$$0 = \begin{vmatrix} B-1-\lambda & A^2 \\ -B & -A^2-\lambda \end{vmatrix} = (B-1-\lambda)(-A^2-\lambda) + A^2B$$

$$= -A^2(B-1) - \lambda(B-1-A^2) + \lambda^2 + A^2B$$

$$= \lambda^2 - \lambda(B-1-A^2) + A^2$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{B-1-A^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B-1-A^2}{2}\right)^2 - A^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \text{tr } \underline{A} \pm \sqrt{(\text{tr } \underline{A})^2 - 4 \det \underline{A}} \right)$$

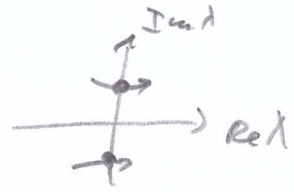
Übergang  $\odot$  nach  $\odot$  für  $\text{tr } \underline{A} = 0$

$\Rightarrow B-1-A^2 = 0 \Leftrightarrow B = 1+A^2$  (Stabilität für  $\text{tr } \underline{A} < 0 \Rightarrow B < 1+A^2$ )

Stabilitätswechsel / Bifurkation:

$\lambda_{1,2} (B=1+A^2) = 0 \pm \sqrt{0^2 - A^2} = \pm iA$

$\Rightarrow$  rein imaginär  $\Rightarrow$  Hopf!



Frage: Wann gibt es eine diffusive Instabilität?

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f_2(u, v) + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Linearisierung:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} - D_1 k^2 & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} - D_2 k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - D_1 k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - D_2 k^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{tr } \underline{A} = \frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} - (D_1 + D_2) k^2 = a_{11} + a_{22} - (D_1 + D_2) k^2$$

$$\det \underline{A} = (a_{11} - D_1 k^2)(a_{22} - D_2 k^2) - a_{12} a_{21}$$

Instabilität für (i)  $\text{tr } \underline{A} > 0$  (Fokus oder Knoten für  $\det \underline{A} > 0$ )

(ii)  $\det \underline{A} < 0$  (Sattel)

(i)  $a_{11} + a_{22} - (D_1 + D_2) k^2 < 0$ , weil  $(a_{11} + a_{22}) < 0$ , damit System  
 $\text{tr } \underline{A}(D_i=0)$  für  $D_1 = D_2 = 0$  stabil ist!

$$\Rightarrow \text{(ii) } \det \underline{A} = \underbrace{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}_{\det \underline{A}_0} - (D_1 a_{22} + D_2 a_{11}) k^2 + D_1 D_2 k^4$$

$$\det \underline{A}_0 = \det \underline{A}(D_i=0) > 0$$

Bemerkung wie (i)

Instabilität bei  $\det \underline{A} = 0 \Rightarrow$  reelle Nullstellen von Polynom in  $k^2 = \eta$

$$\Rightarrow D_1 D_2 \eta^2 - (D_1 a_{22} + D_2 a_{11}) \eta + \det \underline{A}_0 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \eta_{1,2} = \frac{1}{2 D_1 D_2} \left( (D_1 a_{22} + D_2 a_{11}) \pm \sqrt{(D_1 a_{22} + D_2 a_{11})^2 - 4 D_1 D_2 \det \underline{A}_0} \right)$$

$$\Rightarrow \text{(a) } D_1 a_{22} + D_2 a_{11} > 0$$

$$\text{(b) } (D_1 a_{22} + D_2 a_{11})^2 > 4 D_1 D_2 \det \underline{A}_0$$

$$(a) a_{22} + a_{11} \frac{D_2}{D_1} > 0 \Rightarrow s = \frac{D_2}{D_1} > -\frac{a_{22}}{a_{11}} > 0$$

$$a_{22} + a_{11} < 0 \Rightarrow -\frac{a_{22}}{a_{11}} > 1$$

$$\begin{aligned} a_{11} < 0 & \text{ oder } a_{22} < 0 \\ a_{22} > 0 & \text{ oder } a_{11} > 0 \end{aligned}$$

$$(b) \left( a_{22} + a_{11} \frac{D_2}{D_1} \right)^2 > 4 \frac{D_2}{D_1} \det A_0$$

$$=: s$$

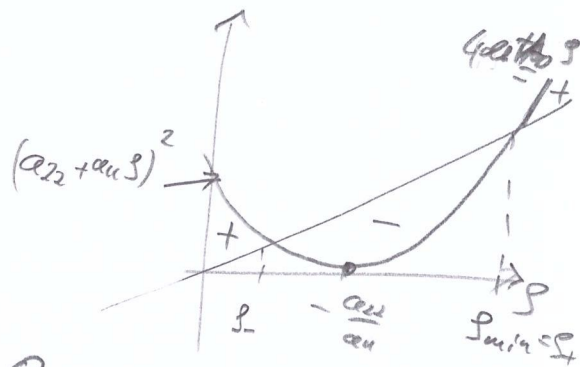
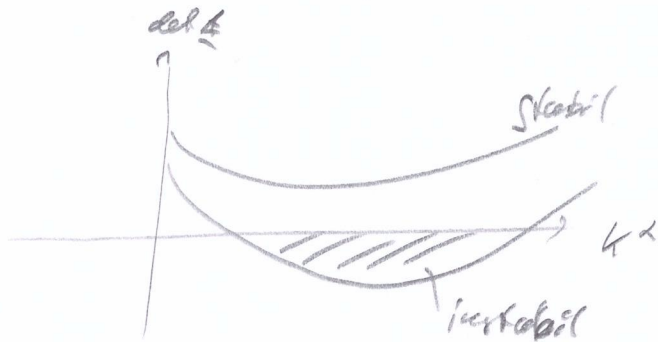
$$\Rightarrow (a_{22} + a_{11} s)^2 > 4 \det A_0 s$$

$$\Rightarrow s^2 + s \left( \frac{-4 \det A_0 + 2 a_{22} a_{11}}{a_{11}^2} \right) + \frac{a_{22}^2}{a_{11}^2} > 0$$

$$\Rightarrow s_{\pm} = \frac{1}{a_{11}^2} \left( 2 \det A_0 - a_{22} a_{11} \pm \sqrt{(2 \det A_0 - a_{22} a_{11})^2 - a_{11} a_{22}} \right)$$

$$= \frac{1}{a_{11}^2} \left( 2 \det A_0 - a_{11} a_{22} \pm 2 \sqrt{\det A_0 (\det A_0 - a_{11} a_{22})} \right)$$

$\Rightarrow$  Unterschied in Diffusionskoeffizienten muss groß genug sein!

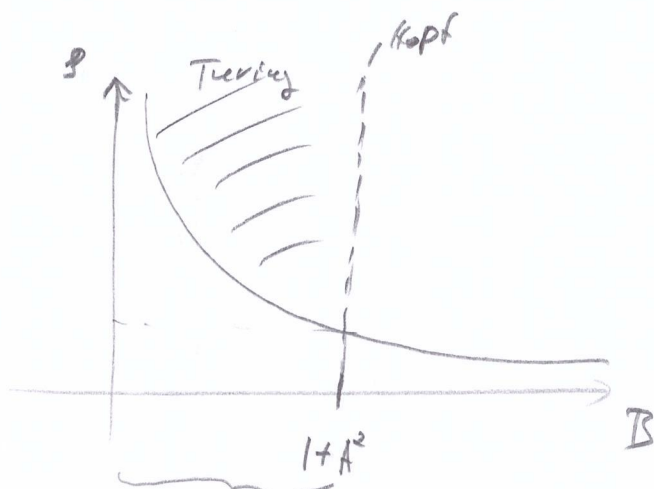


Zurück zu Brüsseler-Kochell:  $a_{11} = B - 1 > 0$ ,  $a_{22} = -A^2 < 0$

5

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{D_1} > \text{Stabilität} &= \frac{1}{(B-1)^2} \left( 2A^2 + (B-1)A^2 + 2 \sqrt{A^2(A^2 + (B-1)A^2) + BA^2} \right) \\ &= \frac{1}{(B-1)^2} \left( A^2(B+1) + 2A^2\sqrt{B} \right) \\ &= \frac{A^2}{(B-1)^2} \left( B+1 + 2\sqrt{B} \right) \\ &= \frac{A^2 (\sqrt{B}+1)^2}{(B-1)^2} = \frac{A^2 (\sqrt{B}+1)^2}{[(\sqrt{B}-1)(\sqrt{B}+1)]^2} \\ &= \frac{A^2}{\sqrt{B}-1} \end{aligned}$$

=>



$B < 1+A^2 \Rightarrow c^k, v^k \text{ stabil}$

Frage: What about the following SJS furs?

$$(1) \begin{aligned} \dot{u} &= R_1(u, v) u \\ \dot{v} &= R_2(u, v) v \end{aligned} \quad R_i: \text{Wachstumsraten}$$

Gibt es für negative Wachstumsraten Kreisförmigkeit (siehe Beispiel)?

$$(2) \begin{aligned} \dot{u} &= R(u) u - P(u) v \\ \dot{v} &= e P(u) v - \mu(v) v \end{aligned} \quad \begin{aligned} R: & \text{Wachstum Bank} \\ \mu: & \text{Mortalität Räuber} \\ P: & \text{per capita Fress rate} \\ e: & \text{Konversions Koeffizient} \end{aligned}$$

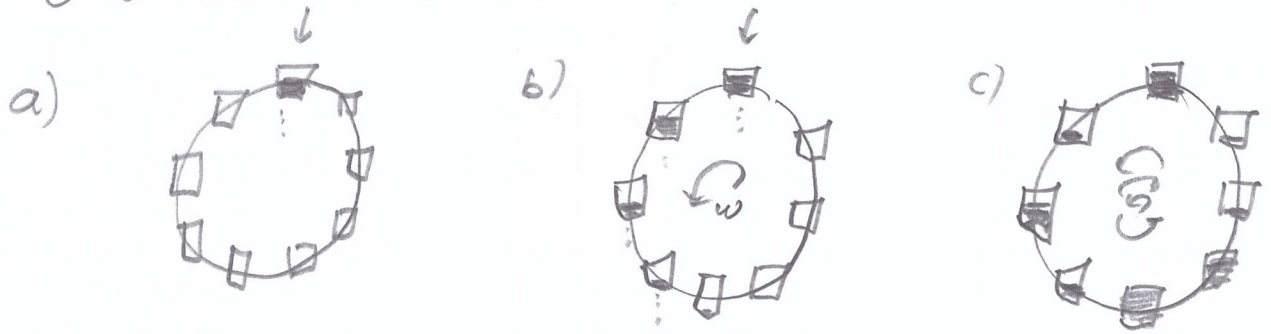
→ Räuber - Beute - Modell  
(u) (v)

Gibt es kein Kreisförmigkeit (siehe Beispiel)?

Texte  $\text{tr} \neq$ ,  $\text{det} \neq \dots$

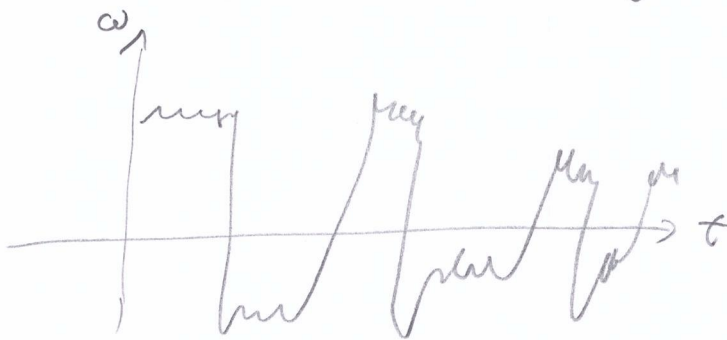


### 3. Chaotisches Wasserrad

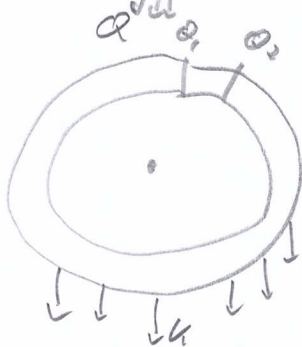


Setup: Einseitiges Wasserrad, das von oben kontinuierlich befüllt wird. Löcher im Boden der Becher lassen Wasser zurückfließen.

- Beobachtung:
- a) Stillstand (Reibung zu groß)
  - b) Rad dreht sich langsam in eine Richtung (Zufluss > Abfluss) (Becher lassen sich bis untere Position erreichen)
  - c) chaotische Bewegung (Zufluss < Abfluss)



Beschreibung durch kontinuierliches Modell:



- $\theta$ : Winkel (Lagerwinkel)
- $m(\theta)$ : Massendichte
- $Q(\theta)$ : Zufloßrate
- $r$ : Radius
- $U$ : Abfloßrate
- $\nu$ : Dämpfungskonstante
- $J$ : Trägheitsmoment

Ziel: Gleichgew. für (i) Masse  $m(\theta, t)$  und (ii) Winkelgeschwindigkeit  $\omega$

(i) Änderung der Masse  $\Delta M$  in einem  $d\theta$  breiten Element:

Beiträge (a)  $\Delta M_1 = Q(\theta, t) \Delta t$  Zulauf

(b)  $\Delta M_2 = -k u(\theta) \Delta t$  Abfluss

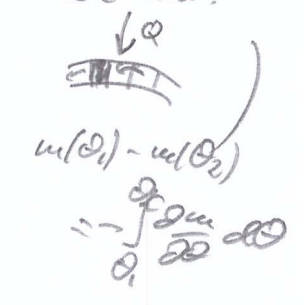
(c)  $\Delta M_3 = -\omega \frac{\partial u}{\partial \theta} \Delta t$  Konvektiver Anteil (Differenz von Winkelanteil mehr weniger):

Zusammen:  $\Delta M = \Delta M_1 + \Delta M_2 + \Delta M_3$

$$= [Q(\theta, t) - k u(\theta) - \omega \frac{\partial u}{\partial \theta}] \Delta t$$

Für kleine Zeitintervalle:  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}$

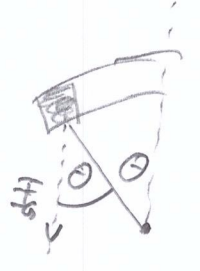
$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q(\theta, t) - k u(\theta, t) - \omega \frac{\partial u}{\partial \theta}$$



(ii) Betrachte Drehmoment:

$\int \dot{\omega} =$  Dämpfung + Gravitationskraft

$$\Rightarrow \int \dot{\omega} = -\nu \omega + g r \int_0^{2\pi} u(\theta, t) \sin \theta d\theta$$



Integro-differenzielle Gleichung!  
 nicht schön, aber hier lösbar!

Trick: Fourier-Zerlegung:

(i) (a)  $Q(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos(n\theta)$  Symmetrisch, d.h. keine  $\sin(n\theta)$  Terme

(b)  $u(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t) \sin(n\theta) + b_n(t) \cos(n\theta)]$

Einsetzen liefert:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} [\dots] = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos(n\theta) - k \sum_{n=0}^{\infty} [\dots] + \omega \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n=0}^{\infty} [\dots]$$

Trick: Orthogonalität von  $\cos(k\theta)$  und  $\sin(k\theta)$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos(k\theta) \sin(m\theta) d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin(k\theta) \sin(m\theta) d\theta = \pi \delta_{km}$$

Sammeln der Terme liefert (alle  $\cos$ - und  $\sin$ -Koeffizienten)

$$\begin{cases} \dot{a}_n = -k a_n + \omega_n b_n \\ \dot{b}_n = q_n - k b_n - \omega_n a_n \end{cases}$$

(ii)  $\dot{J}\dot{\omega} = -\nu\omega + gr \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} [a_k(t) \sin(k\theta) + b_k \cos(k\theta)] \sin(1\cdot\theta) d\theta$

↑  
orthogonal

$$\begin{aligned} &= -\nu\omega + gr \int_0^{2\pi} a_1(t) \sin^2\theta d\theta \\ &= a_1(t) \pi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{J}\dot{\omega} = -\nu\omega + gr \pi a_1(t)$$

Fixpunkte: S.G. Blatt

Hinweis: Rotierender Fixpunkt nur für  $\frac{\pi gr q_1}{k^2 \nu} > 1$

Rayleigh-Zahl

↪ Verhältnis von Inertie und Reibung (Dissipation)

#### 4. Rotation eines starren Körpers

10

Freie(!)

Euler-Gleichung:

$$\frac{d\underline{L}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{L} = 0 \quad \text{mit Drehimpuls } \underline{L} = \underline{J}_{ij} \underline{\omega}$$

in Hauptachsenschwerachsen:  $L_1 = J_1 \omega_1, L_2 = J_2 \omega_2, L_3 = J_3 \omega_3$

$$\underline{\omega} \times \underline{L} = \begin{pmatrix} \omega_2 L_3 - \omega_3 L_2 \\ \omega_3 L_1 - \omega_1 L_3 \\ \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es gibt 1 instabile & 2 neutral stabile Moden!

# 7. Übung zur Nichtlinearen Dynamik und Stabilitätstheorie

1. Besprechung des G. Blattes
2. Poincaré-Bendixon-Theorem
3. Zusammenfassung
4. Zeitschleife

1. Besprechung des G. Blattes  
↳ Lösung zu den Zeilen

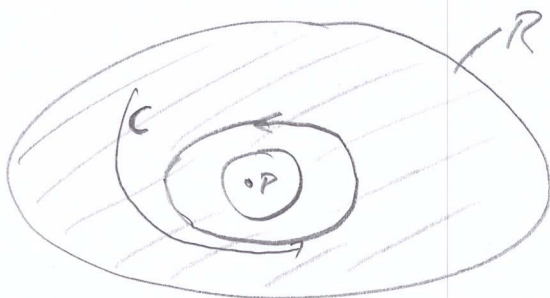
2. Poincaré-Bendixon-Theorem

Thm: Es sei:

- (a)  $R$  eine abgeschlossene/begrenzte Untermenge der Ebene ( $\mathbb{R}^2$ )
- (b)  $\dot{x} = f(x)$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Untermenge von  $\mathbb{R}^2$
- (c)  $R$  ohne Fixpunkt
- (d)  $C$  eine Trajektorie in  $R$  (bleibt in  $R$  für alle Zeiten)

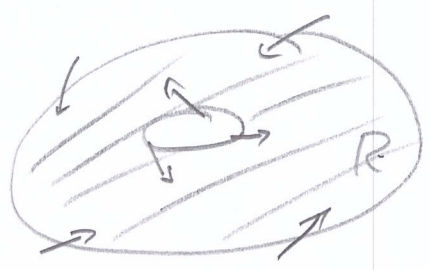
Dann ist  $C$  entweder ein Grenzzyklus/geschlossenes Orbit oder  $C$  nähert sich einem geschlossenen Orbit für  $t \rightarrow \infty$  an.

Folge: Es gibt einen Grenzzyklus in  $R$ .



Bedingungen (a)-(c) leicht zu prüfen.

Für (d) reicht der Nachweis aus, dass  $C \in \mathbb{R}$  gegeben ist, d.h. das Vektorfeld zeigt ins Innere von  $\mathbb{R}$ . Dann bleiben alle Trajektorien in  $\mathbb{R}$ .



Bsp.: (1)  $\dot{z} = (1+i)z - |z|^2 z, z \in \mathbb{C}$

$z = e^{i\theta} r \implies \dot{z} = \dot{r} e^{i\theta} + i r \dot{\theta} e^{i\theta} = (1+i) r e^{i\theta} - r^3 e^{i\theta}$

$\implies \text{Re: } \dot{r} = r - r^3 \quad \text{Im: } \dot{\theta} = 1 \implies \text{Erhaltung: } \dot{r} = r - r^3 + \mu r \cos \theta, \dot{\theta} = 1$

Fall:  $\mu = 0 : \dot{r} = 0 \implies r = 0 \text{ oder } r = 1$

$\mu \neq 0$ : Grenzzyklus existiert (und Fixpunkt bei  $r = 0$  auch)

Idee: Konstruieren Kreise mit  $r_{\max}$  &  $r_{\min}$ , mit  $\dot{r} < 0$  bzw.  $\dot{r} > 0$ .  
Maximum                      Minimum

$\implies$  Dann ist  $\mathbb{R}$  gegeben durch Scheibe  $0 < r_{\min} < r < r_{\max}$ , wobei beide Fixpunkte liegen, weil  $\dot{\theta} = 1$ .

$r_{\min}$ :  $\dot{r} = r(1-r^2) - \mu r \cos \theta > 0$

$\cos \theta = 1 \implies 1 - r^2 - \mu > 0 \implies r_{\max} < \sqrt{1-\mu}$  etwa  $r_{\min} = 0,999 \sqrt{1-\mu}$

$\hookrightarrow \mu < 1$

$r_{\max}$ :  $\dot{r} = r(1-r^2) - \mu r \cos \theta < 0$

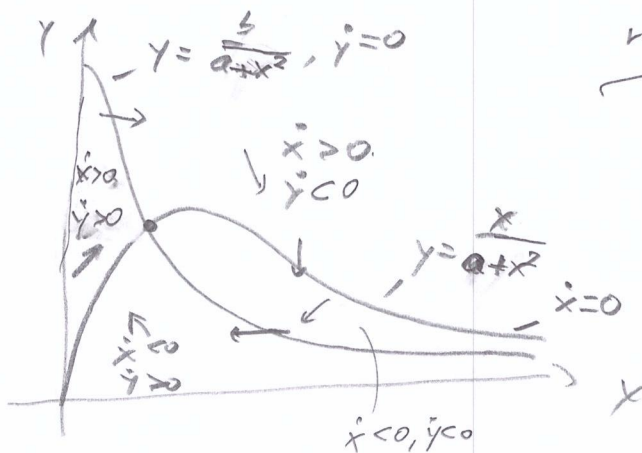
$-\infty < \theta < \infty \implies 1 - r^2 + \mu < 0 \implies r_{\max} > \sqrt{1+\mu}$  etwa  $r_{\max} = 1,001 \sqrt{1+\mu}$

(2) 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay + x^2y \\ \dot{y} = b - ay - x^2y \end{cases} \text{ glycolysis (Zuckerstoffwechsel)}$$

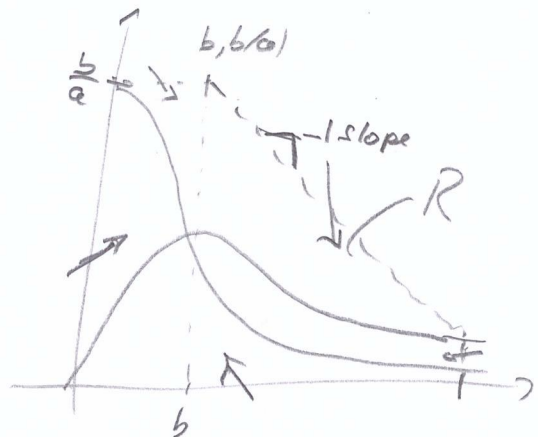
$$a, b > 0$$

$x$ : [ADP],  $y$ : [tricarbonsäure-phosphate]

Nachklammern:



Trapping region



$x$  sehr groß  $\Rightarrow \dot{x} \approx x^2y$ ,  $\dot{y} \approx -x^2y \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = -1$

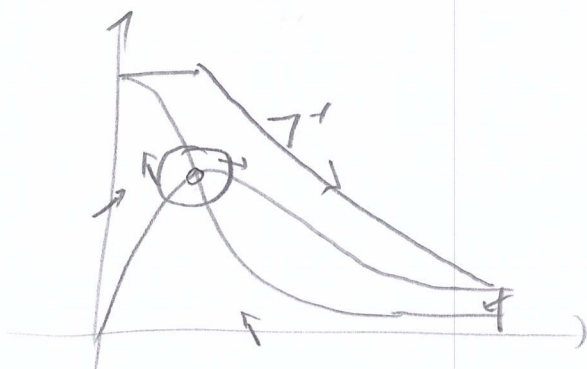
$\Rightarrow \dot{x} - (-\dot{y}) = -x + ay + x^2y - (-b + ay + x^2y)$   
 $= b - x$

$\Rightarrow -\dot{y} > \dot{x}$  für  $x > b \Rightarrow$  fliehe ab  $-1!$

Sind wir fertig für Poincaré-Bendixon-Theorem?

Nein! Was ist mit dem Fixpunkt?!

Lock in R definieren:



Ist FP wirklich stabil?

Check Eigenwerte der Jacobis Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -1 + 2xy & a + x^2 \\ -2xy & -(a + x^2) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 + 2 \frac{b^2}{a+b^2} & a + b^2 \\ -2 \frac{b^2}{a+b^2} & -(a + b^2) \end{pmatrix}$$

Fixpunkt:  $x^* = b$

$y^* = \frac{b}{a+b^2}$

Test / Verifikation lokale Extrema

$$x'' = -b + a \frac{b}{a+b^2} + \frac{b^2 b}{(a+b^2)^2}$$

$$= \frac{-ab - b^3 + ab + b^3}{(a+b^2)^2} = 0$$

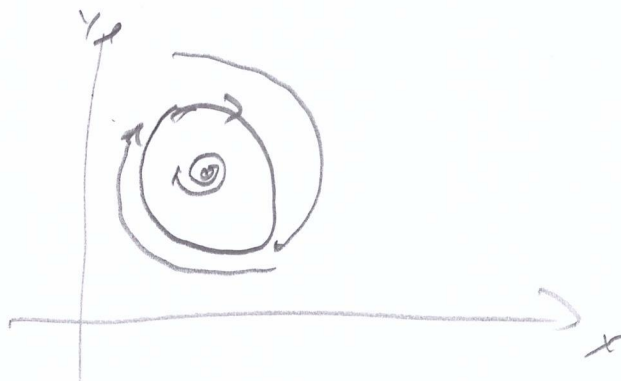
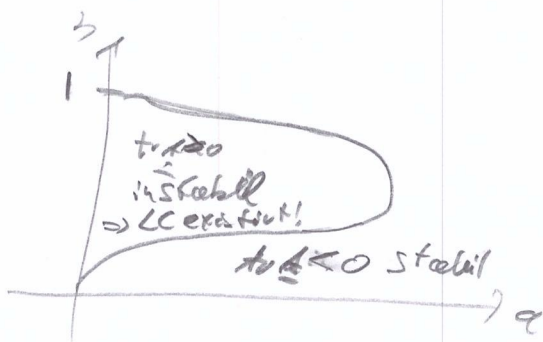
$$y'' = b - a \frac{b}{a+b^2} - \frac{b^2 b}{a+b^2} = \frac{3a+b^3 - ab - b^3}{a+b^2} = 0$$

$\det A = a + b^2 + 2b^2 + 2b^2 = a + 5b^2 > 0$

$\text{tr} A = -1 + 2 \frac{b^2}{a+b^2} - (a + b^2) = \frac{-a - b^2 + 2b^2 - (a + b^2)^2}{a+b^2}$

$= \frac{-b^4 - (2a-1)b^2 + a - a^2}{a+b^2} \geq 0?$

$\text{tr} A = 0$  für  $b^2 = \frac{1}{2} (1 - 2a \pm \sqrt{1 - 8a})$





### 3. Zusammenfassung

#### 1. Übung

- Love Affairs

- Maxwell-Bloch-Gleichungen

#### 1. Blatt

- 1. Lotka-Volterra-Modell

- 2. Van-der-Pol-Oszillator

#### 2. Übung

- Erzeugung eines deterministischen Chaos Modells

- Poincaré-Abbildung

- (• Poincaré-Bendixson-Theorem)

#### 2. Blatt

- 3. Poincaré-Abbildung

- 4. Reduziertes SWIFEL-Modell

#### 3. Übung

- zeitliche diskrete Abbildungen

- Lorenz-System revisited

#### 3. Blatt

- 5. logistische Abbildung

- 6. Homoklinen Orbit im Lorenz-System

#### 4. Übung

- Henon-Abbildung

- OGY-Kontrolle revisited

- Delay embedding

#### 4. Blatt

- 7. Meyer-Schwamm und Kontrolle / Draccus, etc

- 8. Chaos-Kontrolle - OGY-Methode

#### 5. Übung

- Komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung

- Fitzhugh-Nagumo-Modell

- Schlögl-Modell

#### 5. Blatt

- 9. Bergmann-Fair-Erhaltlichkeit

- 10. Fitzhugh-Nagumo-System

#### 6. Übung

- Brusselator-Modell revisited

- Chaotisches Wasserrad

- Freie Rotation eines starren Körpers

#### 6. Blatt

- 11. Stabilität der freien Rotation eines

- starren Körpers

- 12. Chaotisches Wasserrad

#### 7. Übung

- Poincaré-Bendixson-Theorem