3. Übung zur Nichtlinearen Dynamik & Strukturbildung

Inhalt: 1. Besprechung des 2. Blattes
2. Lorenz-Modell (revisited)
3. Diskrete Abbildungen

---

1. Besprechung des 2. Übungsblattes

↳ Lösung in Ausschnitten
↳ Code-Beispiel

2. Lorenz-Modell (revisited)

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y\\ \dot{y} &= \varrho x - y - xz\\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}\right\}$$

s. Edward N. Lorenz: Deterministic nonperiodic flow
J. Atmospheric Sciences 20, 130 (1963)

Chaos für $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$, $\varrho = 24$ (vgl. 2. Vorlesung)

Fixpunkte: $C_0 = (0,0,0)$

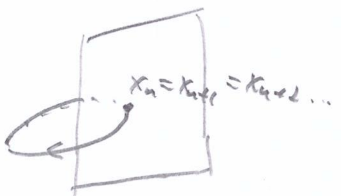
$$C_{1,2} = \left(\pm\sqrt{\beta(\varrho-1)},\ \pm\sqrt{\beta(\varrho-1)},\ \varrho-1\right)$$

Stabilität + Eigenvektoren s. 3. Übungsblatt

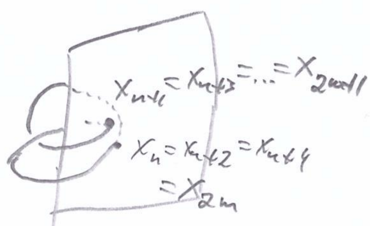
3. Diskrete Abbildungen

dynamisches System: $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t))$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

Poincaré-Abbildung: $\underline{f}: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$, $\underline{f}: \underline{x}_n \mapsto \underline{f}(\underline{x}_n) = \underline{x}_{n+1}$



Periodischer Orbit von $\underline{F}$ $\Longleftrightarrow$ Fixpunkt von $\underline{f}$



Periodenverdopplung in $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}) \Leftrightarrow$ Periodische Lösung in $\underline{f}$

- lineare Stabilitätsanalyse:

$x^* = f(x^*) \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n = x^*$

Abweichg von x^*: $x_n = x^* + \delta x_n$

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(x^* + \delta x_n) \simeq \underbrace{f(x^*)}_{= x^*} + \underbrace{Df(x^*)}_{= f'(x^*)\ (1D)} \delta x_n$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x_{n+1} - x^*}_{\delta x_{n+1}} \simeq f'(x^*)\, \delta x_n$$

$$\delta x_{n+1} \simeq f'(x^*)\, \delta x_n$$

$$\Rightarrow \delta x_n \begin{cases} \text{wächst für } |f'(x^*)| > 1 \Leftrightarrow |\lambda| > 1 \\ \text{nimmt ab für } |f'(x^*)| < 1 \Leftrightarrow |\lambda| < 1 \end{cases}$$

$f'(x^*) = \lambda$ (Eigenwert von $Df(x^*)$)

vgl. Dgl-Systeme: $Re(\lambda) < 0$ entscheidend!

- Periodischer Orbit / Lösung von $x_{n+1} = f(x_n)$:

Periode 1: $x_{n+1} = f(x_n) = x_n$ (Fixpunkt, s.o.)

Periode 2: $x_{n+2} = f(x_{n+1}) = f(f(x_n)) = f^{(2)}(x_n) = x_n$

$\vdots$

Periode p: $x_{n+p} = f(x_{n+p-1}) = f(f(x_{n+p-2})) = \ldots = f^{(p)}(x_n) = x_n$

$\Rightarrow$ Periodischer Orbit mit Periode p ist Fixpunkt der p-fach iterierten Abbildung: $x^* = f^{(p)}(x^*)$

- Ljapunov-Exponent

Betrachte Wachstum einer kleinen Störung:

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \ln \frac{|\delta x_k|}{|\delta x_0|}$$

$\|\cdot\|$: Norm, etwa $|\cdot|$

Präziser: $$\lambda = \lim_{k\to\infty} \sup \left[\frac{1}{k} \sup_{\|\delta x_0\| \to 0} \ln \underbrace{\frac{\|\delta x_k\|}{\|\delta x_0\|}}_{\text{Differenzenquotient}} \right]$$

Numerisch: $$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \ln |f'(x_k)| = \langle \ln |f'| \rangle$$

Mittelwert von $\ln |f'|$

(Wachstumsrate)

Bsp: (i) logistische Abbildg:

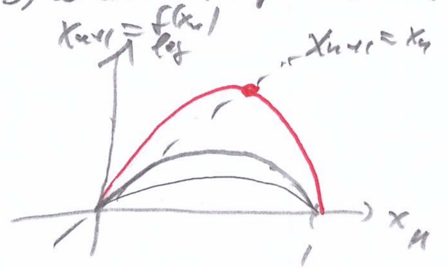
$$x_{n+1} = r\, x_n (1-x_n) = f_{log}(x_n), \quad r \in [0,4] \text{ für } x_n \in [0,1]$$

$$f_{log}: [0,1] \to [0,1]$$

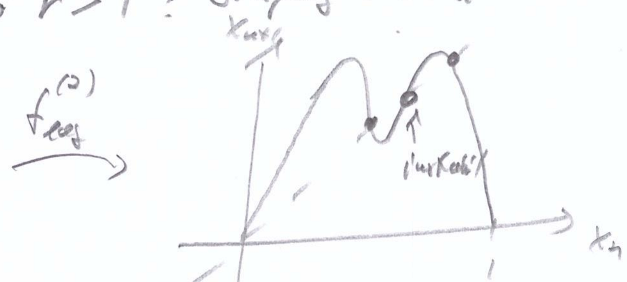
⇒ Fixpunkte: (a) trivialer Fixpunkt $x^* = 0$

Achtung! $x_n = 1$ kein Fixpunkt: $f(1) = 0$

(b) weitere Fixpunkte für $r > 1$: Steigung bei $x_n = 0$

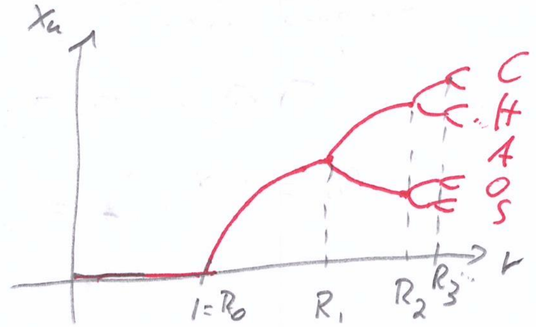


$f^{(2)}_{log}$



höhere Iterierte s. Jupiter-notebook

Bifurkationsdiagramm:



Feigenbaum-Konstante:

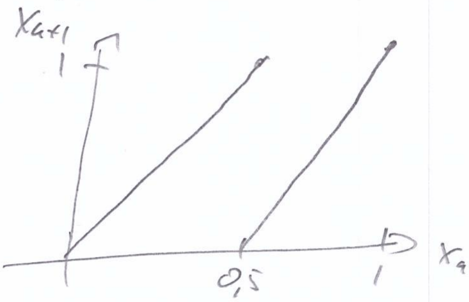
$$\delta_n = \frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n} = 4,669\ldots$$

(ii) Bernoulli-Abbildg

$$f_B: [0,1] \to [0,1]$$

$$x_{n+1} = f_B(x_n) = (a\, x_n) \bmod 1$$ ⇒ kein schönes Bifurkationsdiagramm :-)

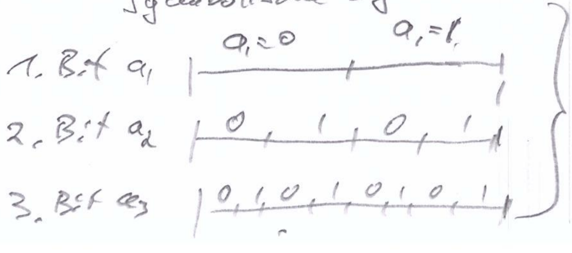
Spannender Wert: $a = 2$



$$f_B(x_n; a=2) = 2x_n - \lfloor 2x_n \rfloor$$

Floor-Funktion

Symbolische Dynamik



$$x_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu 2^{-\nu} \hat{=} (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

$$x_1 = f(x_0) = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu 2^{-\nu+1}\right) \bmod 1 \hat{=} (a_2, a_3, \ldots)$$

1. Bit gelöscht! ⇒ bit shift map

Rationale Zahlen mit periodischen Binär folgen

↳ periodische Orbits von f_B

Bsp: $x_0 = 0.4 \hat{=} 0{,}01100110$

$x_1 = 0.8 \hat{=} 0{,}11001100$

$x_2 = 0{,}6 \hat{=} 0{,}1001101$

$x_3 = 0.2 \hat{=} 0{,}0011011$

$x_4 = 0.4 \hat{=} 0{,}0110110$

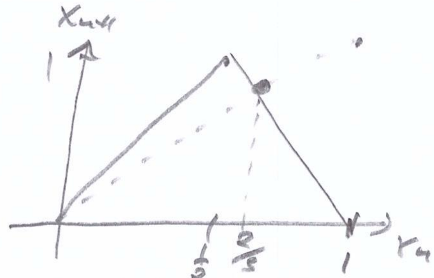
Kleinste Unterschiede (will tausendste Stelle) werden (exponentiell) vergrößert

↳ (diskr.) Ljapunov exponent > 1

(iii) Zelt-Abbildg. (tent map)

$f_{tent} : [0,1] \to [0,1]$

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \text{für } x_n \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2-2x_n & \text{für } x_n \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



Fixpunkte: $x^* = 0$, $x^* = \frac{2}{3} = 2 - 2\,\frac{2}{3} = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}$

Kleinste Unterschiede werden beliebig unterschiedlich in $[0,1]$ abgebildet (für hinreichend große n).