4. Übung zur Nichtlinearen Dynamik & Strukturbildung

Inhalt: 1. Besprechung des 3. Blattes

2. Henon-Abbildung

3. OGY-revisited (4. Delay Embedding)

---

1. Besprechung des 3. Übungsblattes

↳ Lösungen in Ausschnitten

↳ Code-Beispiel

2. Henon-Abbildung

$$\mathrm{I}: x_{n+1} = a - x_n^2 + b y_n$$

$$\mathrm{II}: y_{n+1} = x_n$$

vgl. Wiki

$$\tilde{\mathrm{I}}: \tilde{x}_{n+1} = 1 - \alpha \tilde{x}_n^2 + \tilde{y}_n$$

$$\tilde{\mathrm{II}}: \tilde{y}_{n+1} = \beta \tilde{x}_n$$

Frage: $x_n \leftrightarrow \tilde{x}_n,\ y_n \leftrightarrow \tilde{y}_n,\ a \leftrightarrow \alpha,\ b \leftrightarrow \beta$?

aus $\mathrm{I} \leftrightarrow \tilde{\mathrm{I}}$ folgt: $\underbrace{\frac{1}{a} x_{n+1}}_{=: \tilde{x}_{n+1}} = 1 - \frac{1}{a} x_n^2 + \frac{b}{a} y_n \Rightarrow \boxed{x_n = a \tilde{x}_n}$

$$\Rightarrow \tilde{x}_{n+1} = 1 - \frac{1}{a}(a\tilde{x}_n)^2 + \frac{b}{a} y_n$$

$$= 1 - a \tilde{x}_n^2 + \frac{b}{a} y_n \qquad (a = \alpha)$$

weiter mit $\tilde{y}_n = \frac{b}{a} y_n \Rightarrow \boxed{y_n = \frac{a}{b} \tilde{y}_n}$

$$\tilde{x}_{n+1} = 1 - a\tilde{x}_n^2 + \tilde{y}_n$$

und aus II: $y_{n+1} = x_n$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \tilde{y}_{n+1} = a \tilde{x}_n$$

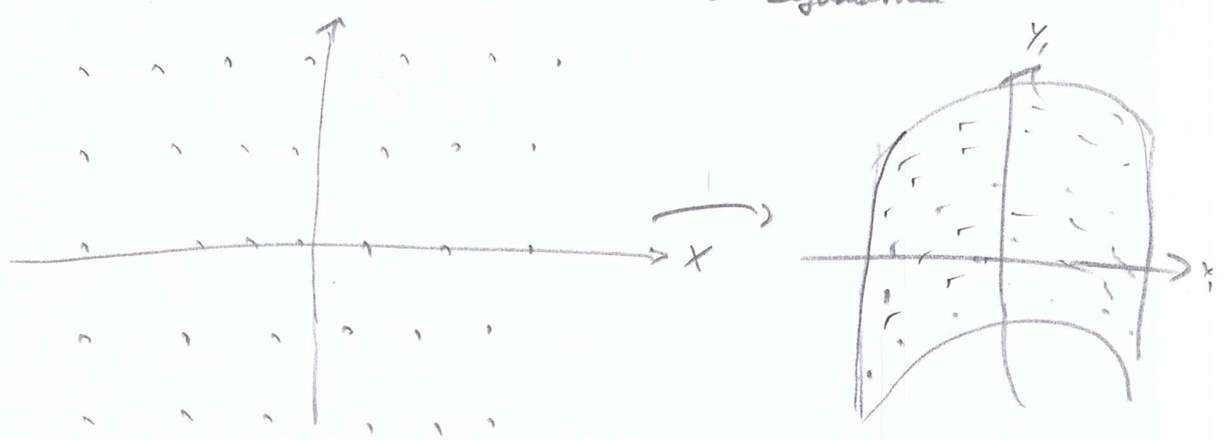
$$\Leftrightarrow \tilde{y}_{n+1} = b \tilde{x}_n \qquad (b = \beta)$$

⇒ Parameter gleich, Variablen reskaliert.

↳ Coding-Beispiel

Dekomposition der Hénon-Abbildung:

1) Transformation: $(x_1, y_1) = (x, \underbrace{1-ax^2+y}_{\text{Deformation}})$



2) Kontraktion in x-Richtung:

$(x_2, y_2) = (bx_1, y_1)$

3) Reflektion / Spiegelung an der Diagonalen: $y = x$

$(x_3, y_3) = (y_2, x_2)$

$(x_3, y_3) = (y_2, x_2) = (y_1, bx_1) = (1-ax^2+y, bx)$

3 OGY - revisited

Edward Ott, Celso Grebogi, James Yorke, Controlling Chaos
PRL 64, 1196 (1990)

1. Motivation
   - chaotisches System soll kontrolliert werden
   - Zugänglicher Systemparameter wird zeitlich um einen kleinen Wert verändert ⇒ Stabilisierung eines periodischen Orbits

2. Was soll stabilisiert werden?
   - strange attractor / seltsamer Attraktor enthält ∞-viele periodische Orbits
   - Ziel: System nur wenig verändern für Stabilisierung

3. Annahme: zur Vereinfachung: 3D-System (geht auch höher)

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = \underline{F}(\underline{x}, p) \qquad , \underline{x} \in \mathbb{R}^3$$

Systemparameter zu verändern

4. Anwendung auf Experimente:
   - geht auch, wenn Dynamik nicht gänzlich bekannt
   - etwa nur 1 Variable → Delay-Embedding:

$$\underline{x}(t) = (\underset{\text{gemessen}}{z(t)}, \underbrace{z(t-T), z(t-2T), \ldots, z(t-MT)}_{\text{spannt Phasenraum auf}})$$

5. Systemparameter:
   - p kann im kleinen Bereich variiert werden o.B.d.A.: $p_0 = 0$

$$-p_* < p_0 < p_*$$

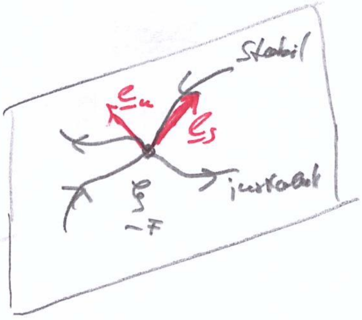
6. Poincaré-Schnitt

3D-DGL → 2D-Abbildung (zeitlich diskret)

periodischer Orbit ⟷ Fixpunkt

7a Benötigtes Wissen über Fixpunkt:

- ξ_F sei der Ziel-Fixpunkt
- ξ_F ist Sattel:

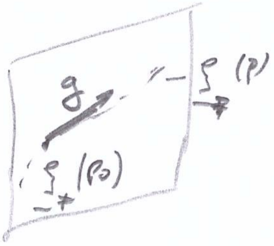


wir brauchen: $e_u, e_s, \overbrace{\lambda_u, \lambda_s}^{\text{Eigenwerte}}$

(e_u: instabile, e_s: stabile)

$|\lambda_u| > 1 > |\lambda_s|$

7b Wie verschiebt sich der FP, wenn P verändert wird?



$$g := \frac{\partial \xi_F(P)}{\partial P}\Big|_{P_0}$$ Richtungsableitung

$$\approx \frac{1}{P}\xi_F(P)$$

8 Duale Vektoren:

- e_u, e_s nicht unbedingt orthogonal.
- Duale Basis f_u, f_s mit $f_u \cdot e_u = 1$, $f_u \cdot e_s = 0$, $f_s \cdot e_u = 0$, $f_s \cdot e_s = 1$

allgemein: $v = \alpha e_u + \beta e_s \Rightarrow \alpha = f_u \cdot v,\ \beta = f_s \cdot v$

9 Wie verhält sich ξ_{n+1} in der Nähe von ξ_F für kleine p um P_0?

$$(1)\quad \xi_{n+1} \approx \underbrace{\overbrace{P_n g}^{\xi_F(P)}}_{\text{Lage d. verschobenen FP}} + \underbrace{\left[\lambda_u e_u f_u + \lambda_s e_s f_s\right]}_{M:\ \text{Linearisierung}} (\xi_n - \overbrace{P_n g}^{\xi_F(P)})$$

10+11+12: OGY-Kontrolle:

- Idee: Wähle P_n, so dass ξ_{n+1} auf stabiler Richtung / Mannigfaltigkeit liegt.

$$f_u \cdot \xi_{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow f_u \cdot \xi_{n+1} = P_n f_u \cdot g + \left[\lambda_u \overset{=1}{(f_u \cdot e_u)} f_u + \lambda_s \overset{=0}{(f_u \cdot e_s)} f_s\right](\xi_n - P_n g)$$

$$0 = P_n f \cdot g + \lambda_u f_u \cdot (\xi_n - P_n g)$$

$$P_n(\lambda_u - 1) f_u \cdot g = \lambda_u f_u \cdot \xi_n \Rightarrow (2)\quad P_n = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1}\frac{f_u \cdot \xi_n}{f_u \cdot g}$$

13 Kontrollbedingen

- Anwendung nur, wenn (i) $\underline{\xi}_n$ nahe genug an $\underline{\xi}_F$ liegt:

$$\underline{\xi}_n^u = \underline{f}_u \cdot \underline{\xi}_n$$

$\hookrightarrow \quad |\underline{f}_u \cdot \underline{\xi}_n| < \xi_* \quad$ (think: δ)

mit $\delta = p_* \, |(1-\lambda_u^{-1}) \, \underline{f}_u \cdot \underline{g}|$

und $-p_* < p_u < p_*$

$$\boxed{(1-\lambda_u^{-1})^{-1} = \left(\frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1}\right)}$$

(4. Delay Embedding)

· Rekonstruktion eines dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

über zeitverzögerte Koordinaten ($\rightarrow$ Attraktor scheint durch):

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \approx \left.\begin{pmatrix} x_k(t) \\ x_k(t-T) \\ \vdots \\ x_k(t-MT) \end{pmatrix}\right| \quad k \in \{1, \ldots, n\} \text{ oder auch Kombination von messbaren Komponenten.}$$

$\longrightarrow$ Takens Theorem: $M > 2d$ (d: fraktale Hausdorff-Dimension)