

Kelvin-Helmholtz-Instabilität

Die Kelvin-Helmholtz-Instabilität tritt in Schichtenströmungen auf, in denen das Strömungsprofil mindestens einen Wendepunkt hat. Die freie Scherschicht, die nach einer Strömungsablösung entsteht, z.B. an einer Düse oder hinter einem stumpfen Körper, weist solch einen oder mehrere Wendepunkte auf. Sind zwei Fluide mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten geschichtet und nicht mischbar, so kann sich ebenfalls eine instabile Scherschicht ausbilden. Die Kelvin-Helmholtz-Instabilität beschreibt die räumliche und zeitliche Ausbreitung einer dieser Scherschicht aufgeprägten Störung. Die Instabilität der Scherschicht ist allein auf die Form des Strömungsprofils zurückzuführen und praktisch unabhängig von der Viskosität, im Gegensatz zur Tollmien-Schlichting-Instabilität, die erst durch die viskositätsbedingte zeitliche Schwankung des Strömungsprofils an einer Wand entstehen kann.

Die Kelvin-Helmholtz-Instabilität wurde zuerst von HERMANN V. HELMHOLTZ [5] im Jahr 1868 beschrieben. LORD KELVIN [6] formulierte und löste im Jahr 1871 das Problem der Instabilität. Analytische Lösungen der die Kelvin-Helmholtz-Instabilität beschreibenden Rayleigh-Gleichung [10] sind von S.CHANDRASEKHAR [3] zusammengetragen worden. Numerische Methoden sind bei A.MICHALKE [7], R.BETCHOW & W.O.CRIMINALE [2] zu finden. Grundlagen und Konzepte der Strömungsinstabilitäten vermitteln die Bücher von P.G. DRAZIN & W.H.REID [4] sowie von H.OERTEL JR. & J.DELFS [8].

Sachverhalt

Betrachtet werden im Folgenden zwei geschichtete inkompressible zähigkeitsfreie Fluide in zwei ebenen, parallelen Strömungen mit verschiedenen Geschwindigkeiten U_1 und U_2 . Eine solche Strömung entsteht z.B. hinter einer Splitterplatte (Abb. 1). Löst die Grenzschicht ab, bildet sich zwischen den beiden Strömungsgebieten eine freie Scherschicht, die durch große mittlere Geschwindigkeitsgradienten $\frac{dU}{dy}$ charakterisiert ist. Die Kelvin-Helmholtz-Instabilität beschreibt die Entwicklung dieser Scherschicht unter einer äußeren Störung. In einem mit $U_m = (U_1 + U_2)/2$ bewegten Bezugssystem und der Idealisierung, dass die Scherschicht unendlich dünn sei (Abb. 2), lässt sich in einem Gedankenexperiment, wie in Abb. 3 gezeigt, die Scherschicht stationär nach oben auslenken. Dann stellt sich aufgrund der schnelleren Strömung im oberen Gebiet nach der

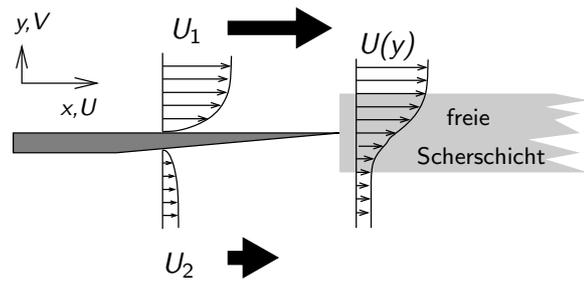


Abbildung 1: Entstehung eines instabilen Strömungsprofils

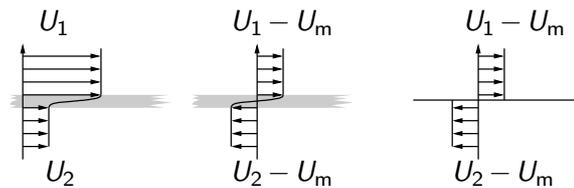


Abbildung 2: Bezugssystem und Idealisierung der Scherschicht

Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2}\rho U^2 + p_{\text{stat}} = p_{\text{ges}} = \text{const.}$$

ein statischer Unterdruck ein und im unteren Gebiet ein statischer Überdruck. In dieser stationären Betrachtung wirkt dann auf die Scherschicht insgesamt eine destabilisierende Kraft nach oben. Außerdem wird aufgrund der sich oberhalb und unterhalb der Scherschicht einstellenden Asymmetrie der Strömungsgeschwindigkeit, die Scherschicht nach rechts transportiert, was zu einer Aufsteilung führt.

Wird die freie Scherschicht – wieder in einem Gedankenexperiment – räumlich sinusförmig ausgelenkt (Abb. 4), so wächst die Amplitude aufgrund der destabilisierenden Druckfelder zeitlich an, und die benachbar-

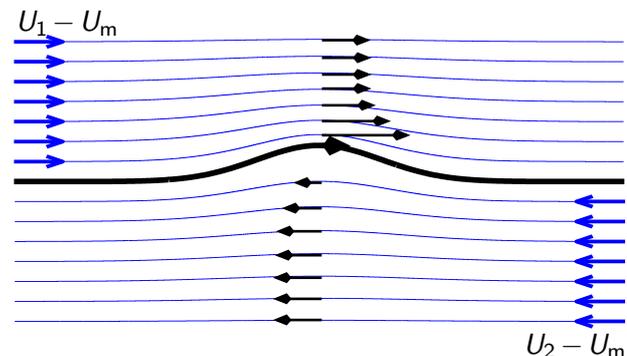


Abbildung 3: Potentiallösung einer gedachten Scherschichtauslenkung

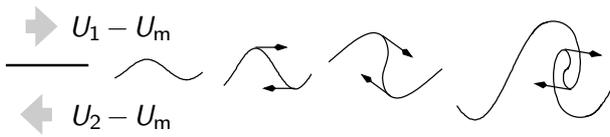


Abbildung 4: Aufwickeln der Scherschicht bei endlichen Amplituden

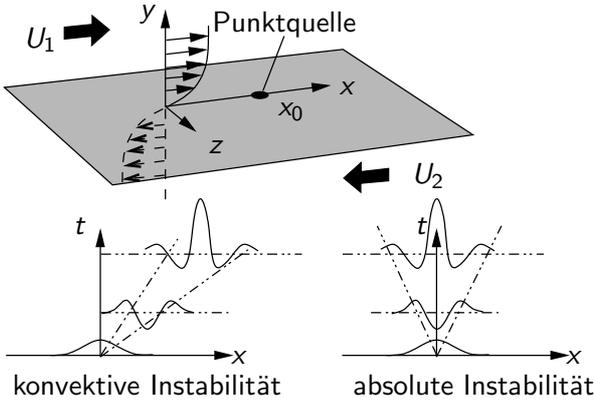


Abbildung 5: Räumliche und zeitliche Ausbreitung eines Störimpulses

ten stark gekrümmten Berge und Täler laufen aufeinander zu, was im weiteren Verlauf zu einer Aufwicklung der Scherschicht führt. Unberücksichtigt bleibt in dieser Plausibilitätsbetrachtung, dass der Druckabfall über die Scherschicht hinweg zur Beschleunigung dieser führt, was in der stationären Bernoulli Gleichung nicht berücksichtigt wird. Das instationäre Problem lässt sich vollständig durch Wirbeldynamik beschreiben ([1],[4]).

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer infinitesimalen, räumlich und zeitlich impulsförmigen Störung muss aus Symmetriegründen $U_m = (U_1 + U_2)/2$ sein. In einem Bezugssystem, in dem U_1 gerade $-U_2$ ist, wächst die Störung zeitlich an und bleibt am Ort der Störung für alle Zeiten stehen, man spricht dann von einer absoluten Instabilität. In einem Bezugssystem, das sich mit U_2 bewegt, schwimmt der Störimpuls vom Störort ab und wird räumlich verstärkt; nach einer gewissen Zeit verschwindet die Störung am Störort. Man spricht dann von einer konvektiven Instabilität (Abb 5).

Der Begriff der Kelvin-Helmholtz-Instabilität kann weiter gefasst werden, wenn man in den Schichten verschiedene Fluide, mit verschiedenen Dichten und Oberflächenspannungen zulässt und die Gewichtskraft mit einbezieht. Prinzipiell ändert sich dadurch lediglich die Beziehung von Quergeschwindigkeit und Druck an der Schnittstelle zwischen den beiden Fluiden. Die Oberflächenspannung und die Gewichtskraft haben dabei einen stabilisierenden Effekt auf die Kelvin-Helmholtz-

Instabilität.

Kennwerte, Funktionen

Wird eine Schichtenströmung mit dem Hauptströmungsprofil $\bar{U}(y)$ an einem Ort zeitlich sinusförmig mit der Frequenz ω_s gestört und ist diese Störung infinitesimal, so lässt sich im Sinne der klassischen Stabilitätstheorie jede Strömungsgröße Φ als Summe eines zeitlich gemittelten Teils $\bar{\Phi}$ und einer diese Grundströmung störenden Welle mit der Wellenlänge $2\pi/\Re\{k\}$ und einer Anfachung $-\Im\{k\}$ darstellen:

$$\Phi(x, y, t) = \bar{\Phi}(y) + \tilde{\Phi}(y) \cdot e^{i(kx - \omega_s t)}.$$

Aus der Impulsgleichung für inkompressible Strömungen lässt sich durch Linearisierung die Rayleigh-Gleichung für die Amplitude der Quergeschwindigkeit $\tilde{v}(y)$ ableiten:

$$\frac{d^2 \tilde{v}(y)}{dy^2} = \left(k^2 + \frac{\frac{d^2 \bar{U}(y)}{dy^2}}{\bar{U}(y) - \frac{\omega_s}{k}} \right) \cdot \tilde{v}(y),$$

wobei als Randbedingung zu fordern ist, dass $\tilde{v}(y)$ für $y \rightarrow \pm\infty$ verschwindet. Die Lösungen dieser Eigenwertgleichung liefern komplexe Dispersionsrelationen zwischen der eingebrachten Störfrequenz ω_s und der komplexen Wellenzahl k . Es ist ebenso umgekehrt möglich, die zeitliche Anfachung und Schwingungsdauer ω auf eine vorgegebene räumlichen Störwellenlänge k_s zu finden, was hier aber nicht betrachtet werden soll.

In Abb. 6 ist die räumliche Anfachung und Wellenlänge (komplexe Wellenzahl k) als Funktion der reellen Störfrequenz ω_s dargestellt. Als dimensionslose Anregungsfrequenz wird hier die Strouhalzahl

$$Sr = \frac{\omega_s \delta}{|U_1 - U_2|}$$

benutzt, wobei δ die charakteristische Dicke der Scherschicht darstellt. Für Scherschichten endlicher Dicke gibt es ein Fenster, in dem Anfachung ($-\Im\{k\} > 0$) auftritt.

Das Strömungsprofil eines Freistrahls führt zu zwei Dispersionsrelationen (Moden) wie in Abb. 7 gezeigt.

Betrachtet man zusätzlich Dichteunterschiede dp/dy in y -Richtung, so ist die Richardson-Zahl

$$Ri = -\frac{g}{\rho} \frac{dp}{dy} / \left(\frac{dU}{dy} \right)^2$$

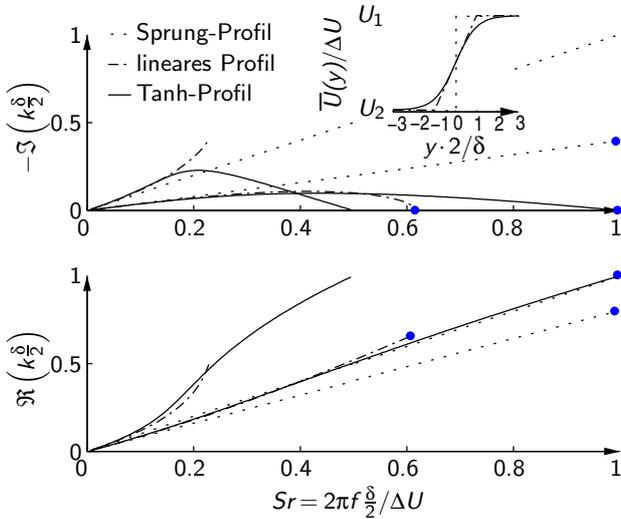


Abbildung 6: Dispersionsrelation verschiedener instabiler Strömungsprofile, die Linien mit Punkt am Ende sind für $U_1=3/2U_m$ und $U_2 = 1/2U_m$ errechnet, die Linien ohne Punkt gelten für $U_1=2U_m$ und $U_2 = 0$

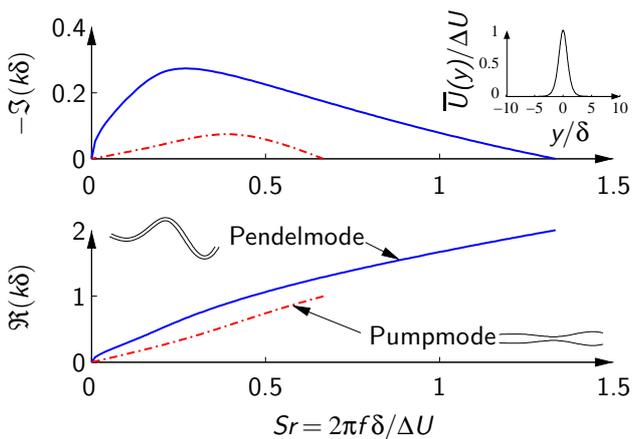


Abbildung 7: Pump- und Pendelmode für einen Freistrah mit $\Delta U / \cosh(y/\delta)^2$ -Profil



Abbildung 8: Kelvin-Helmholtz-Wolken, in der Nähe von Boulder, Colorado USA, mit freundlicher Genehmigung des National Center for Atmospheric Research, USA

eine dimensionslose Größe, die das Verhältnis von stabilisierenden Auftriebskräften aufgrund des Dichtegradienten zu destabilisierenden Druckkräften aufgrund der Scherung beschreibt. Diese Größe wird oft zur Klassifizierung turbulenter Mischungsvorgänge in der Atmosphäre herangezogen.

Anwendungen

Die Kelvin-Helmholtz-Instabilität lässt sich bei Inversionswetterlagen am Himmel beobachten, dabei entstehen die typischen Kelvin-Helmholtz-Wolken (Abb. 8). Bei der sogenannten CAT (clear air turbulence), die ebenfalls durch die Kelvin-Helmholtz-Instabilität entsteht, können sehr große, für Flugzeuge gefährliche Vertikalgeschwindigkeiten auftreten.

Die Anregung von Wasserwellen durch Wind, lässt sich teilweise durch die Kelvin-Helmholtz-Instabilität beschreiben.

Wird die Splitterplattenkonfiguration in Abb. 1 durch ein oszillierendes Druckfeld gestört (hier mittels zweier Membranen, die sich gleichphasig bewegen) lassen sich die in Abb. 9 durch Tinte sichtbar gemachten räumlich angefachten Kelvin-Helmholtz-Wellen beobachten.

Dasselbe ist für einen Freistrah in Abb. 10 (a) und (b) zu sehen.

Das Strömungsprofil des Nachlaufs hinter einem quer angeströmten Zylinders ist absolut instabil. Daraus resultiert die Kármánsche Wirbelstraße. Sie hat über einen sehr großen Bereich von Anströmungsgeschwindigkeiten U_0 (Reynoldszahlbereich) eine Strouhalzahl ($Sr =$

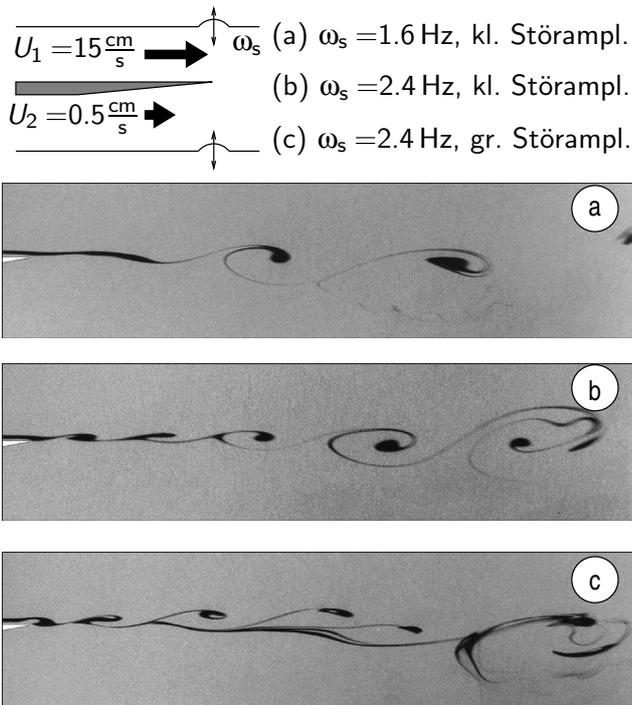


Abbildung 9: Künstliche Anregung der Kelvin-Helmholtz-Instabilität in Wasser an der Hinterkante einer Platte. (Bilder von A.Ickler)

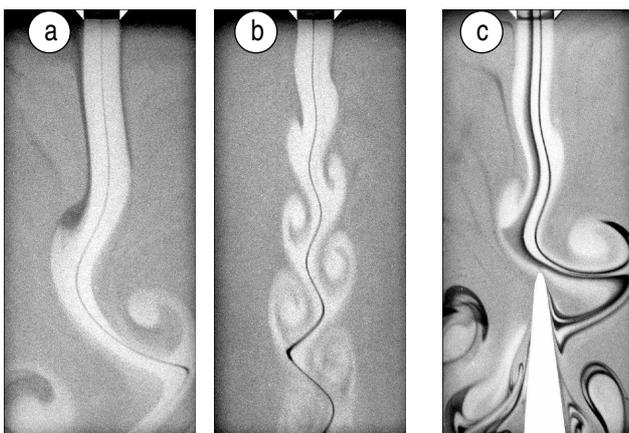


Abbildung 10: Konvektive Instabilität des Freistrahls $\Delta U = 5 \text{ cm/s}$: (a) und (b) mit künstlicher Anregung $\omega_s = 1 \text{ Hz}$ (a) und $\omega_s = 2 \text{ Hz}$ (b), selbsterregte Schwingung des Strahl-Kanten-Systems (c). (Bilder von A.Ickler)

f : Zylinderdurchmesser d/U_0) von $Sr = 0.21$, damit „singt“ eine Leitung ($d = 5 \text{ mm}$), die mit $U_0 = 10 \text{ m/s}$ angeströmt wird bei einer Frequenz von 420 Hz .

Die Kelvin-Helmholtz-Instabilität erzeugt Schall, wenn eine räumlich angefachte Kelvin-Helmholtz-Welle auf ein Hindernis stößt [9]. In Abb. 10 (c) ist eine durch Tinte sichtbar gemachte selbsterregte Oszillation des Freistrahls zu sehen. Diese Tonerzeugung wird in Flöten und Orgelpfeifen ausgenutzt, indem noch ein Oszillator angekoppelt wird, dessen Resonanzfrequenz die Schwingungsfrequenz der Kelvin-Helmholtz-Instabilität bestimmt. Unerwünscht ist diese Schallerzeugung z.B. beim Wummern von geöffneten Bahn- oder Autofenstern.

Soll sich ein durch eine Düse in einen Raum eingespritztes Medium mit dem Medium in diesem Raum möglichst gut mischen, so kann man die Energie der turbulenten Mischbewegung durch gezielte künstliche Anregung der Kelvin-Helmholtz-Instabilität erhöhen und damit die Durchmischung beschleunigen.

Literaturverzeichnis

- [1] BATCHELOR, G.K.: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [2] BETCHOW, ROBERT; CRIMINALE, WILLIAM O. JR.: *Stability of Parallel Flows*. Applied Mathematics and Mechanics. Academic Press, London and New York, 1967.
- [3] CHANDRASEKHAR, S.: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford University Press, London and New York, 1961.
- [4] DRAZIN, P.G.; REID, W.H.: *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, 1981.
- [5] HELMHOLTZ, HERRMANN VON: *Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen*. Monatsberichte Königlich Preussische Akad. Wiss. Berlin, 23:215–28, 1868.
- [6] KELVIN, LORD: *Hydrokinetic solutions and Observations*. Phil. Mag., 42(4):362–77, 1871.
- [7] MICHALKE, A.: *On spatially growing disturbances in inviscid shear layer*. Journal Fluid Mechanics, 19:521–44, 1965.
- [8] OERTEL, HERBERT JR.; DELFS, JAN: *Strömungsmechanische Instabilitäten*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1996.
- [9] POWELL, ALAN: *On the edgetone*. Journal of the Acoustical Society of America, 33(4):395–410, 1961.
- [10] RAYLEIGH, LORD: *On the stability, or instability, of certain fluid motions*. Proc. London Math. Soc., 11:57–70, 1880.