

# 6. Übung zur Nichtlinearen Dynamik & Strukturbildung

- Inhalt:
1. 5. Übungsblatt
  2. Brusselator - Modell revidiert
  3. Chaos des Wasserrad
  4. <sup>Freie</sup> Rotationen eines starren Körpers

1. 5. Übungsblatt
  - ↳ Lösung zu Aufg. 3

2. Brusselator - Modell revidiert (S. VL 13)

Zunächst ohne Diffusion:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= A - Bu + u^2 v - u \\ \frac{dv}{dt} &= Bu - u^2 v \end{aligned} \right\} \Leftarrow \begin{aligned} A &\rightarrow u \\ B+u &\rightarrow v+d \\ 2u+v &\rightarrow 3u \quad (\text{autokatalytisch}) \\ u &\rightarrow e \end{aligned}$$

Bestimme Fixpunkt & Stabilität:

$$\dot{u} = 0 \text{ und } \dot{v} = 0 \Rightarrow \text{(i) } 0 = u^*(B - u^*v^*) \Rightarrow v^* = \frac{B}{u^*}$$

$u^* = 0$  ist kein FP wegen  $\dot{v} = A$

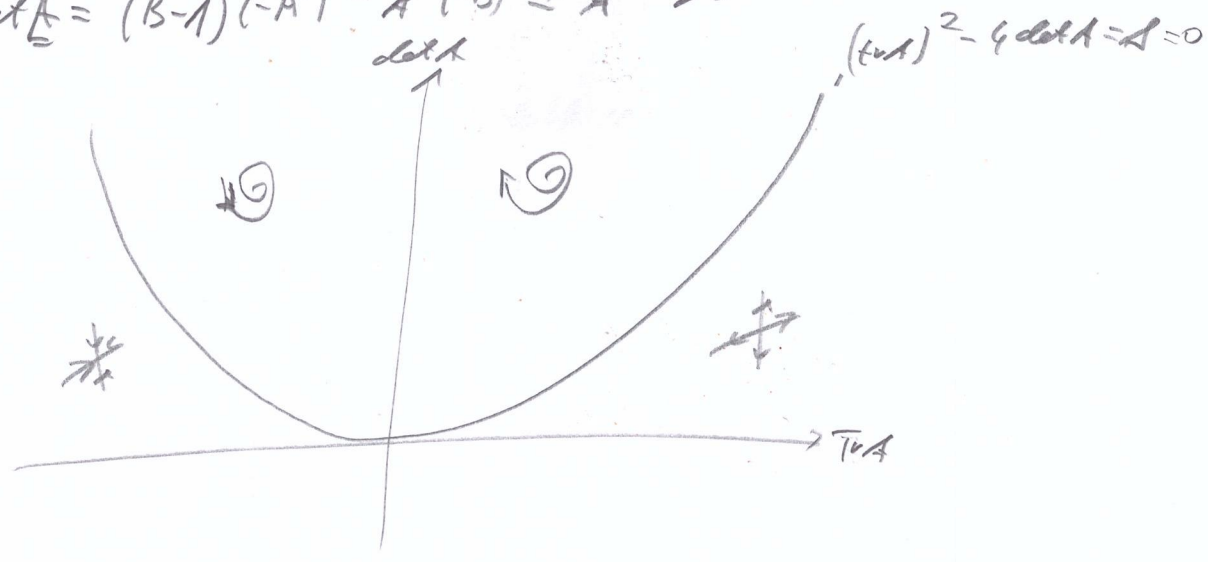
$$\begin{aligned} \text{(ii) } \dot{u} = 0 &\Rightarrow 0 = A - Bu^* + (u^*)^2 v^* - u^* \\ &= A - \underbrace{Bu^* + u^* \frac{B}{u^*}}_{=0} - u^* \\ &\Rightarrow u^* = A \Rightarrow v^* = \frac{B}{A} \end{aligned}$$

Stabilität: Jacobi-Matrix:

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} -B + 2u^*v^* - 1 & (u^*)^2 \\ B - 2u^*v^* & -(u^*)^2 \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{u^*=A \\ v^*=\frac{B}{A}}} \\ &= \begin{pmatrix} B-1 & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\text{Spur } \underline{A} = \text{tr } \underline{A} = B-1-A^2$

$\text{det } \underline{A} = (B-1)(-A^2) - A^2(-B) = A^2 > 0$



$\Delta = (B-1-A^2)^2 - 4A^2 = (B-1)^2 - 2(B-1)A^2 + A^4 - 4A^2$

Eigenwerte:

$$0 = \begin{vmatrix} B-1-\lambda & A^2 \\ -B & -A^2-\lambda \end{vmatrix} = (B-1-\lambda)(-A^2-\lambda) + A^2B$$

$$= -A^2(B-1) - \lambda(B-1-A^2) + \lambda^2 + A^2B$$

$$= \lambda^2 - \lambda(B-1-A^2) + A^2$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{B-1-A^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B-1-A^2}{2}\right)^2 - A^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \text{tr } \underline{A} \pm \sqrt{(\text{tr } \underline{A})^2 - 4 \text{det } \underline{A}} \right)$$

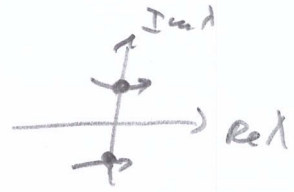
Übergang  $\odot$  nach  $\odot$  für  $\text{tr } \underline{A} = 0$

$\Rightarrow B-1-A^2 = 0 \Leftrightarrow B = 1+A^2$  (Stabilität für  $\text{tr } \underline{A} < 0 \Rightarrow B < 1+A^2$ )

Stabilitätswechsel / Bifurkation:

$\lambda_{1,2} (B=1+A^2) = 0 \pm \sqrt{0^2 - A^2} = \pm iA$

$\Rightarrow$  rein imaginär  $\Rightarrow$  Hopf!



Frage: Wann gibt es eine diffusive Instabilität?

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f_2(u, v) + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Linearisierung:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} - D_1 k^2 & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} - D_2 k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - D_1 k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - D_2 k^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{tr } \underline{A} = \frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} - (D_1 + D_2) k^2 = a_{11} + a_{22} - (D_1 + D_2) k^2$$

$$\det \underline{A} = (a_{11} - D_1 k^2)(a_{22} - D_2 k^2) - a_{12} a_{21}$$

Instabilität für (i)  $\text{tr } \underline{A} > 0$  (Fokus oder Knoten für  $\det \underline{A} > 0$ )

(ii)  $\det \underline{A} < 0$  (Sattel)

(i)  $a_{11} + a_{22} - (D_1 + D_2) k^2 < 0$ , weil  $(a_{11} + a_{22}) < 0$ , damit System  
 $\text{tr } \underline{A}(D_i=0)$  für  $D_1 = D_2 = 0$  stabil ist!

$$\Rightarrow \text{(ii) } \det \underline{A} = \underbrace{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}_{\det \underline{A}_0} - (D_1 a_{22} + D_2 a_{11}) k^2 + D_1 D_2 k^4$$

$$\det \underline{A}_0 = \det \underline{A}(D_i=0) > 0$$

Bemerkung wie (i)

Instabilität bei  $\det \underline{A} = 0 \Rightarrow$  reelle Nullstellen von Polynom in  $k^2 = \eta$

$$\Rightarrow D_1 D_2 \eta^2 - (D_1 a_{22} + D_2 a_{11}) \eta + \det \underline{A}_0 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \eta_{1,2} = \frac{1}{2 D_1 D_2} \left( (D_1 a_{22} + D_2 a_{11}) \pm \sqrt{(D_1 a_{22} + D_2 a_{11})^2 - 4 D_1 D_2 \det \underline{A}_0} \right)$$

$$\Rightarrow \text{(a) } D_1 a_{22} + D_2 a_{11} > 0$$

$$\text{(b) } (D_1 a_{22} + D_2 a_{11})^2 > 4 D_1 D_2 \det \underline{A}_0$$

$$(a) a_{22} + a_{11} \frac{D_2}{D_1} > 0 \Rightarrow s = \frac{D_2}{D_1} > -\frac{a_{22}}{a_{11}} > 0$$

$$\begin{aligned} a_{22} + a_{11} < 0 \\ \Rightarrow -\frac{a_{22}}{a_{11}} > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11} < 0 & \text{ oder } a_{22} < 0 \\ a_{22} > 0 & \text{ oder } a_{11} > 0 \end{aligned}$$

$$(b) \left( a_{22} + a_{11} \frac{D_2}{D_1} \right)^2 > 4 \frac{D_2}{D_1} \det_{\neq 0} \underline{A}$$

$$\stackrel{=: s}{=} s$$

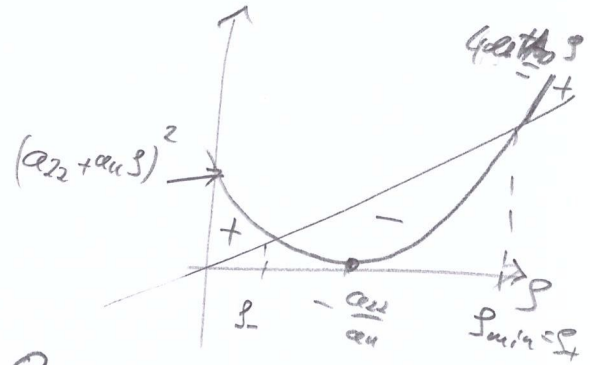
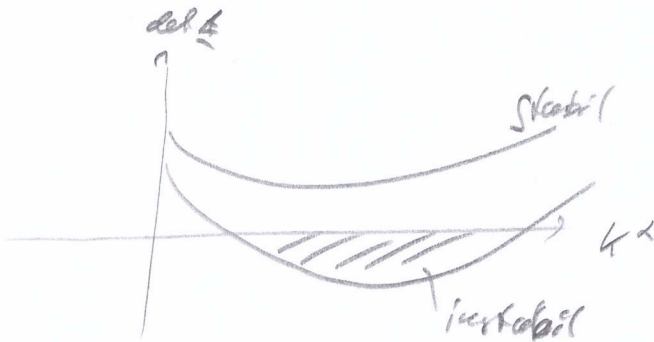
$$\Rightarrow (a_{22} + a_{11} s)^2 > 4 \det_{\neq 0} \underline{A} s$$

$$\Rightarrow s^2 + s \left( \frac{-4 \det_{\neq 0} \underline{A} + 2 a_{22} a_{11}}{a_{11}^2} \right) + \frac{a_{22}^2}{a_{11}^2} > 0$$

$$\Rightarrow s_{\pm} = \frac{1}{a_{11}^2} \left( 2 \det_{\neq 0} \underline{A} - a_{22} a_{11} \pm \sqrt{(2 \det_{\neq 0} \underline{A} - a_{22} a_{11})^2 - a_{11} a_{22}} \right)$$

$$= \frac{1}{a_{11}^2} \left( 2 \det_{\neq 0} \underline{A} - a_{11} a_{22} \pm 2 \sqrt{\det_{\neq 0} \underline{A} (\det_{\neq 0} \underline{A} - a_{11} a_{22})} \right)$$

$\Rightarrow$  Unterschied in Diffusionskoeffizienten muss groß genug sein!

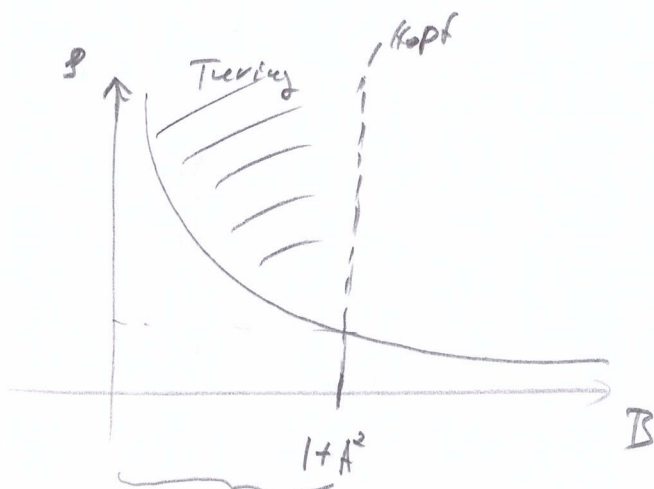


Zurück zu Brusseler-Kochell:  $a_{11} = B - 1 > 0$ ,  $a_{22} = -A^2 < 0$

5

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{D_1} > \text{Stabilität} &= \frac{1}{(B-1)^2} \left( 2A^2 + (B-1)A^2 + 2 \sqrt{A^2(A^2 + (B-1)A^2)} \right) \\ &= \frac{1}{(B-1)^2} \left( A^2(B+1) + 2A^2\sqrt{B} \right) \\ &= \frac{A^2}{(B-1)^2} \left( B+1 + 2\sqrt{B} \right) \\ &= \frac{A^2 (\sqrt{B}+1)^2}{(B-1)^2} = \frac{A^2 (\sqrt{B}+1)^2}{[(\sqrt{B}-1)(\sqrt{B}+1)]^2} \\ &= \frac{A^2}{\sqrt{B}-1} \end{aligned}$$

=>



$B < 1+A^2 \Rightarrow c^k, v^k \text{ stabil}$

Frage: What about the following SJS furs?

$$(1) \begin{aligned} \dot{u} &= R_1(u, v) u \\ \dot{v} &= R_2(u, v) v \end{aligned} \quad R_i: \text{Wachstumsraten}$$

Gibt es für negative Wachstumsraten Kreisbildung (siehe Beispiel)?

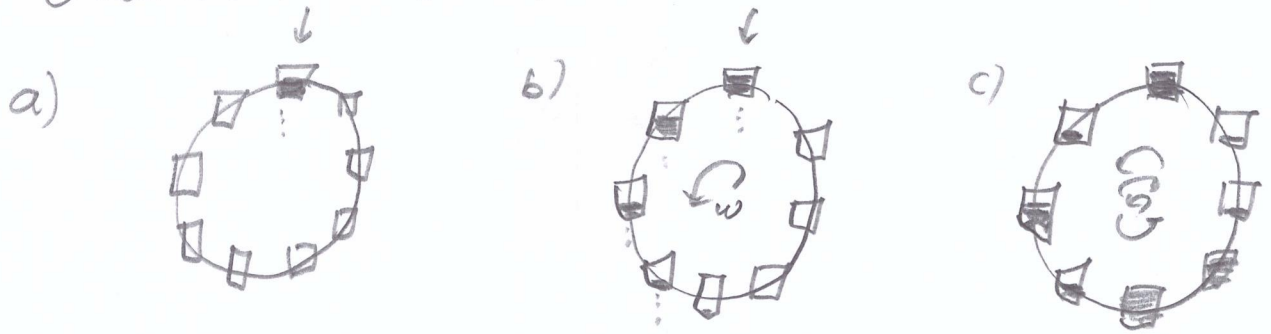
$$(2) \begin{aligned} \dot{u} &= R(u) u - P(u) v \\ \dot{v} &= e P(u) v - \mu(v) v \end{aligned} \quad \begin{aligned} R: & \text{Wachstum Bank} \\ \mu: & \text{Mortalität Räuber} \\ P: & \text{per capita Fress rate} \\ e: & \text{Konversions Koeffizient} \end{aligned}$$

→ Räuber - Beute - Modell  
(u) (v)

Gibt es keine Kreisbildung (siehe Beispiel)?

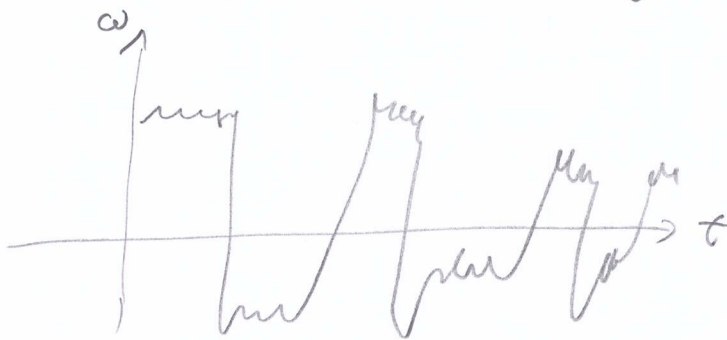
Texte  $\text{tr} \neq$ ,  $\text{det} \neq \dots$

### 3. Chaotisches Wasserrad

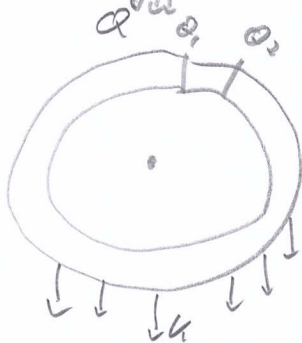


Setup: Einseitiges Wasserrad, das von oben kontinuierlich befüllt wird. Löcher im Boden der Becher lassen Wasser zurückfließen.

- Beobachtung:
- a) Stillstand (Reibung zu groß)
  - b) Rad dreht sich langsam in eine Richtung (Zufluss > Abfluss) (Becher lassen sich bis untere Position erreichen)
  - c) chaotische Bewegung (Abfluss > Zufluss)



Beschreibung durch kontinuierliches Modell:



- $\theta$ : Winkel (Lagerwinkel)
- $m(\theta)$ : Massendichte
- $Q(\theta)$ : Zuflussrate
- $r$ : Radius
- $U$ : Abflussrate
- $\nu$ : Dämpfungskonstante
- $J$ : Trägheitsmoment

Ziel: Gleichgew. für (i) Masse  $m(\theta, t)$  und (ii) Winkelgeschwindigkeit  $\omega$

(i) Änderung der Masse  $\Delta M$  in einem  $d\theta$  breiten Element:

Beiträge (a)  $\Delta M_1 = Q(\theta, t) \Delta t$  Zulauf

(b)  $\Delta M_2 = -k u(\theta) \Delta t$  Abfluss

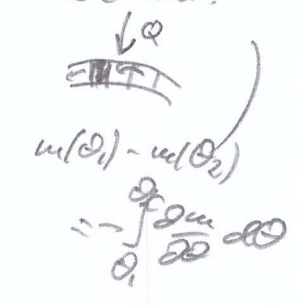
(c)  $\Delta M_3 = -\omega \frac{\partial u}{\partial \theta} \Delta t$  Konvektiver Anteil (Differenz von Winkelanteil mehr weniger):

Zusammen:  $\Delta M = \Delta M_1 + \Delta M_2 + \Delta M_3$

$$= [Q(\theta, t) - k u(\theta, t) - \omega \frac{\partial u}{\partial \theta}] \Delta t$$

Für kleine Zeitintervalle:  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}$

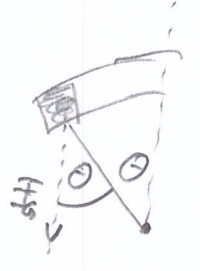
$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q(\theta, t) - k u(\theta, t) - \omega \frac{\partial u}{\partial \theta}$$



(ii) Betrachte Drehmoment:

$\int \dot{\omega} = \text{Damping} + \text{Gravitationskraft}$

$$\Rightarrow \int \dot{\omega} = -\nu \omega + g r \int_0^{2\pi} u(\theta, t) \sin \theta d\theta$$



Integro-differenzialgleichung!  
 nicht schön, aber hier lösbar :-)

Trick: Fourier-Zerlegung:

(i) (a)  $Q(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos(n\theta)$  Symmetrisch, d.h. keine  $\sin(n\theta)$  Terme

(b)  $u(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t) \sin(n\theta) + b_n(t) \cos(n\theta)]$

Einsetzen liefert:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} [\dots] = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos(n\theta) - k \sum_{n=0}^{\infty} [\dots] + \omega \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n=0}^{\infty} [\dots]$$



Trick: Orthogonalität von  $\cos(k\theta)$  und  $\sin(k\theta)$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos(k\theta) \sin(m\theta) d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin(k\theta) \sin(m\theta) d\theta = \pi \delta_{km}$$

Sammeln der Terme liefert (alle  $\cos$ - und  $\sin$ -Koeffizienten)

$$\begin{aligned} \dot{a}_n &= -ka_n + \omega_n b_n \\ \dot{b}_n &= q_n - kb_n - \omega_n a_n \end{aligned}$$

(ii)  $\dot{J}\dot{\omega} = -\nu\omega + gr \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} [a_k(t) \sin(k\theta) + b_k \cos(k\theta)] \sin(1\cdot\theta) d\theta$

↑  
orthogonal

$$\begin{aligned} &= -\nu\omega + gr \int_0^{2\pi} a_1(t) \sin^2\theta d\theta \\ &= a_1(t) \pi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{J}\dot{\omega} = -\nu\omega + gr \pi a_1(t)$$

Fixpunkte: S.G. Blatt

Hinweis: Rotierender Fixpunkt nur für  $\frac{\pi gr q_1}{k^2 \nu} > 1$

Rayleigh-Zahl

↪ Verhältnis von Trägheit und Reibung (Dissipation)

#### 4. Rotation eines starren Körpers

10

Freie(!)

Euler-Gleichung:

$$\frac{d\underline{L}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{L} = 0 \quad \text{mit Drehimpuls } \underline{L} = \underline{J}_{ij} \underline{\omega}$$

in Hauptachsenschwerachsen:  $L_1 = J_1 \omega_1, L_2 = J_2 \omega_2, L_3 = J_3 \omega_3$

$$\underline{\omega} \times \underline{L} = \begin{pmatrix} \omega_2 L_3 - \omega_3 L_2 \\ \omega_3 L_1 - \omega_1 L_3 \\ \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es gibt 1 instabile & 2 neutral stabile Moden!