7. Übung zur Nichtlinearen Dynamik und Strukturbildung

1. Besprechung des 6. Blattes
2. Poincaré-Bendixson-Theorem
3. Zusammenfassung
4. Zeitschiene

1. Besprechung des 6. Blattes

↳ Lösung an Tafel zeigen

2. Poincaré-Bendixson-Theorem

Thm: Es sei:

(a) R eine abgeschlossene/begrenzte Untermenge der Ebene ($\mathbb{R}^2$)

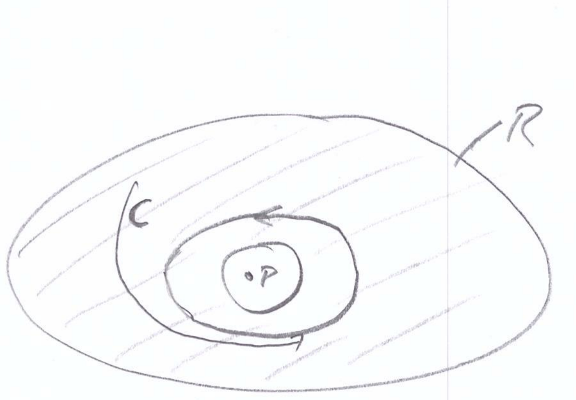
(b) $\dot{x} = f(x)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Untermenge von R

(c) R ohne Fixpunkt

(d) C eine Trajektorie in R (bleibt in R für alle Zeiten)

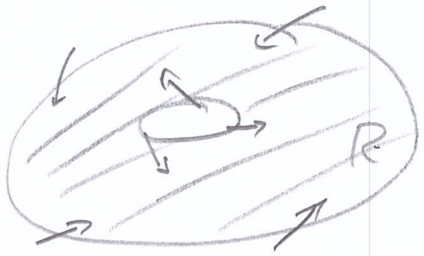
Dann ist C entweder ein Grenzzyklus/geschlossener Orbit oder C nähert sich einem geschlossenen Orbit für $t \to \infty$ an.

Folge: Es gibt einen Grenzzyklus in R.



Bedingungen (a)-(c) leicht zu prüfen.

Für (d) reicht den Nachweis aus, dass C in R gefangen ist, d.h. das Vektorfeld zeigt ins Innere von R. Dann bleiben alle Trajektorien in R.



Bsp.: (1) $\dot{z} = (1+i)z - |z|^2 z \quad , z \in \mathbb{C}$

$z = e^{i\theta} r$ ↳ $\dot{r} e^{i\theta} + i\dot{\theta} r e^{i\theta} = (1+i) r e^{i\theta} - r^3 e^{i\theta}$

$\Rightarrow$ Re: $\dot{r} = r - r^3$

Im: $\dot{\theta} = 1$

$\Big\} \Rightarrow$ Erweiterung: $\dot{r} = r - r^3 + \mu r \cos\theta$, $\dot{\theta} = 1$

Fall: $\mu = 0$: $\dot{r} = 0 \Rightarrow r = 0$ oder $r = 1$

$\mu \neq 0$: Grenzzyklus existiert (und Fixpunkt bei $r=0$ auch)

Idee: Konstruiere Kreise mit r_{max} & r_{min}, mit $\underset{\text{nach innen}}{\dot{r} < 0}$ bzw. $\underset{\text{nach außen}}{\dot{r} > 0}$.

$\Rightarrow$ Dann ist R gegeben durch Scheibe $0 < r_{min} < r < r_{max}$, wo keine Fixpunkte liegen, weil $\dot{\theta} = 1$.

r_{min}: $\dot{r} = r(1-r^2) - \mu r \cos\theta > 0$

$\cos\theta = 1$ ↳ $1 - r^2 - \mu > 0 \Rightarrow r_{min} < \sqrt{1-\mu}$ etwa $r_{min} = 0.999\sqrt{1-\mu}$

↳ $\mu < 1$

r_{max}: $\dot{r} = r(1-r^2) - \mu r \cos\theta < 0$

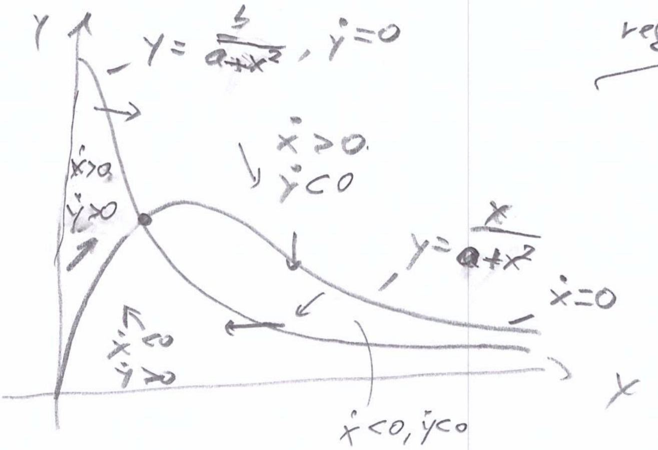
$-1 < \cos\theta < 1$ ↳ $1 - r^2 + \mu < 0 \Rightarrow r_{max} > \sqrt{1+\mu}$ etwa $r_{max} = 1.001\sqrt{1+\mu}$

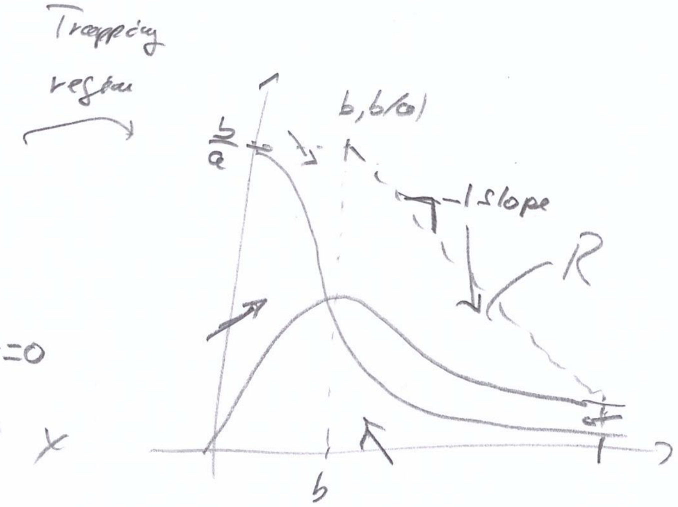
(2) $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -x + ay + x^2 y \\ \dot{y} &= b - ay - x^2 y\end{aligned}\right\}$ glycolysis (Zuckerstoffwechsel)

$a, b > 0$

x: [ADP], y: [Fructose6-phosphate]

Nullklinen:





x sehr groß $\Rightarrow \dot{x} \approx x^2 y$, $\dot{y} \approx -x^2 y \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = -1$

$\Rightarrow \dot{x} - (-\dot{y}) = -x + \cancel{ay} + \cancel{x^2 y} - (-b + \cancel{ay} + \cancel{x^2 y})$

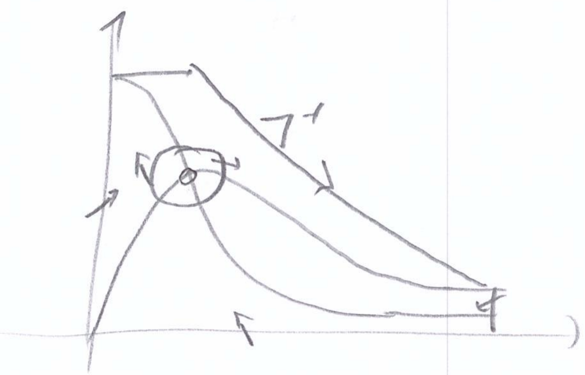
$= b - x$

$\Rightarrow -\dot{y} > \dot{x}$ für $x > b \Rightarrow$ Steiler als -1!

Sind wir fertig für Poincaré-Bendixson-Theorem?

↳ Nein! Was ist mit dem Fixpunkt?!

↳ Loch in R definieren:



Ist FP wirklich instabil?

Check Eigenwerte der Jacobi-Matrix:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1+2xy & a+x^2 \\ -2xy & -(a+x^2) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1+2\frac{b^2}{a+b^2} & a+b^2 \\ -2\frac{b^2}{a+b^2} & -(a+b^2) \end{pmatrix}$$

Fixpunkt: $x^* = b$

$y^* = \frac{b}{a+b^2}$

Test/Verifizieren durch Einsetzen

$$\dot{x}\Big|_{x^*,y^*} = -b + a\frac{b}{a+b^2} + \frac{b^2 b}{a+b^2}$$

$$= \frac{-ab-b^3+ab+b^3}{a+b^2} = 0$$

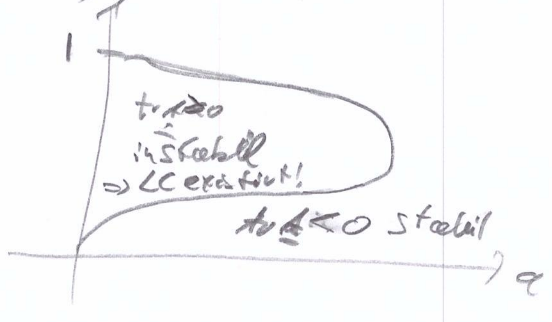
$$\dot{y}\Big|_{x^*,y^*} = b - a\frac{b}{a+b^2} - \frac{b^2 b}{a+b^2} = \frac{ba+b^3-ab-b^3}{a+b^2} = 0$$

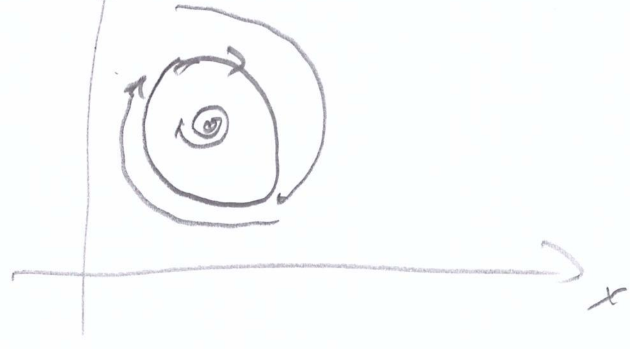
$$\det \underline{\underline{A}} = a+b^2+2b^2 + 2b^2 = a+b^2 > 0$$

$$\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = -1+2\frac{b^2}{a+b^2} - (a+b^2) = \frac{-a-b^2+2b^2-(a+b^2)^2}{a+b^2}$$

$$= \frac{-b^4-(2a-1)b^2+a-a^2}{a+b^2} \gtrless 0 ?$$

$$\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = 0 \text{ für } b^2 = \frac{1}{2}\left(1-2a \pm \sqrt{1-8a}\right)$$





3. Zusammenfassung

1. Übung

- Love Affairs
- Maxwell-Bloch-Gleichungen

1. Blatt

1. Lotka-Volterra-Modell
2. Van-der-Pol-Oszillator

2. Übung

- Erzeugung eines dimensionslosen Modells
- Poincaré-Abbildung
- (Poincaré-Bendixson-Theorem)

2. Blatt

3. Poincaré-Abbildung
4. Reduziertes SNIPER-Modell

3. Übung

- zeitlich diskrete Abbildungen
- Lorenz-System revisited

3. Blatt

5. logistische Abbildung
6. Homokline Orbit im Lorenz-System

4. Übung

- Henon-Abbildung
- OGY-Kontrolle revisited
- Delay embedding

4. Blatt

7. Menger-Schwamm und fraktale Dimension
8. Chaos-Kontrolle-OGY-Methode

5. Übung

- komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung
- FitzHugh-Nagumo-Modell
- Schlögl-Modell

5. Blatt

9. Benjamin-Feir-Instabilität
10. FitzHugh-Nagumo-System

6. Übung

- Brusselator-Modell revisited
- Chaotisches Wasserrad
- Freie Rotation eines starren Körpers

6. Blatt

11. Stabilität der freien Rotation eines starren Körpers
12. Chaotisches Wasserrad

7. Übung

- Poincaré-Bendixson-Theorem