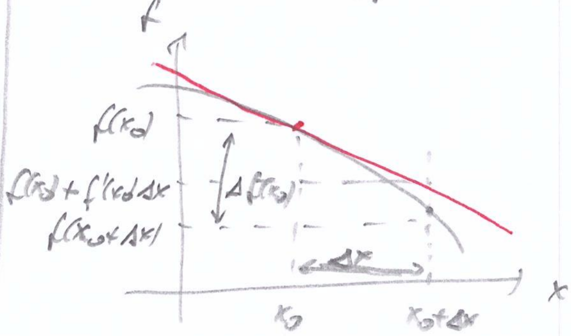
1.1 Introduction

1.2 Linear approximation of a function



idea: approximation of $f(x_0+\Delta x)$ for a given $f(x_0)$ such that the error is of order $O(\Delta x^2)$

$$\Rightarrow f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x + O(\Delta x^2)$$

Def.: A function $f: D \to \mathbb{R}$, defined on an open set D, is said to be **differentiable** at $x_0 \in D$ if the **derivative**

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ exist.

1.2 Lineare Näherung (Fortsetzung)

Notation in der Physik: (i) $f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$

bzw. $f'(x) = \frac{df}{dx}$

(ii) Ableitung nach der Zeit t: $f(t) \Rightarrow \dot{f}(t) = \frac{df}{dt}$

Bsp.: $\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt}$

- höhere Ableitungen:

n-te Ableitung: $$\underbrace{\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}}_{n\text{-mal}} f(x) \underset{\uparrow\ \text{identisch}}{\equiv} \frac{d^n f}{dx^n}(x) \equiv f^{(n)}(x)$$

Bsp: Ort/Höhe/Distanz zum Boden des Apfels: $z(t)$

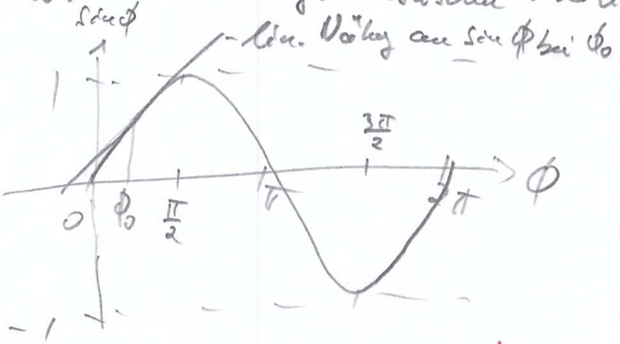
Geschwindigkeit: $v(t) = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$

Beschleunigung $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} (= -g)$

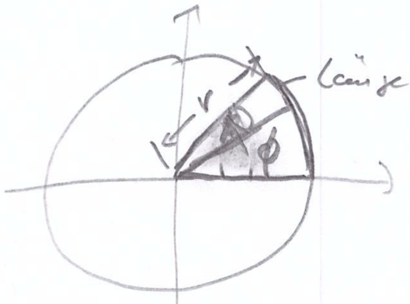
1.3 Beispiel: Ableitung des Sinus

Ziel: Zeigen wir mit rein geometrischen Überlegungen, dass $\frac{d}{d\phi}\sin\phi = \cos\phi$.

Erinnerung: 1)



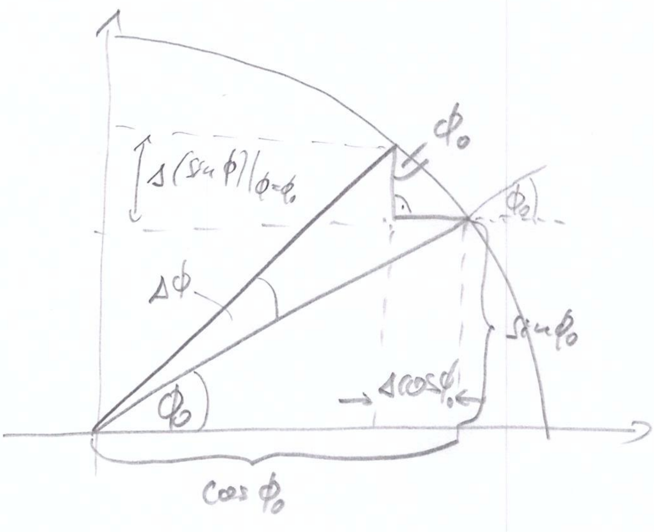
2) Bogenmaß



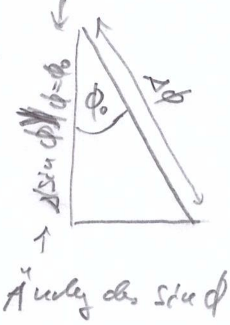
Länge des Bogens: $l = r\phi$ (häufig: Einheitskreis $r = 1$)

Frage: Wo steckt der $\sin\phi = f(\phi)$?

$\Delta(\sin\phi)\big|_{\phi=\phi_0}$: $\Delta\sin$ an der Stelle $\phi = \phi_0$



Zoom:



kleines Dreieck, so dass Bogen mit Länge $\Delta\phi$ fast gerade ist (exakt bei $\Delta\phi \to 0$)

Ablesen: $$\cos\phi_0 = \frac{\Delta(\sin\phi)\big|_{\phi=\phi_0}}{\Delta\phi}$$

$$\Rightarrow f'(\phi_0) = \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta\phi}\Big|_{\phi=\phi_0} = \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{\Delta(\sin\phi)}{\Delta\phi}\Big|_{\phi=\phi_0} = \cos\phi_0$$

1.4 Ableitungsregeln

Siehe Definitionen_TPIa_WS24.pdf

Seien f, g, h differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

1. ***Linearität:*** Für $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\lambda f(x) + \mu g(x))' = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

Die Ableitung ist also ein linearer Operator

2. ***Produktregel:***

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).$$

3. ***Kettenregel:*** Für $h(x) = f(g(x))$ gilt:

$$h(x)' = f'(g(x))\,g'(x).$$

$$= \frac{df}{dy}\bigg|_{y=g(x)} \cdot \frac{dg}{dx} = \frac{df}{dg}\,\frac{dg}{dx}$$

4. ***Quotientenregel:***

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}.$$

5. ***Ableitung einer inversen Funktion:*** Für eine invertierbare Funktion $f(x)$, d.h. $x = f^{-1}(y)$, gilt:

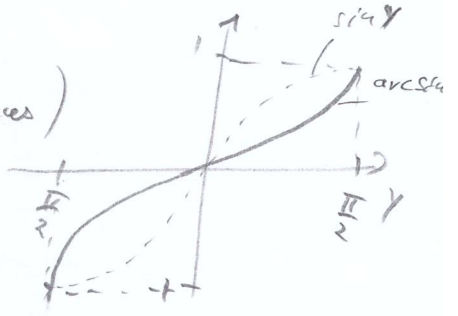
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}} f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}\Big|_{x=f^{-1}(y)}}.$$

Bsp: (i) 3. Kettenregel: $f(x) = \sin^2(x^2) = f(g(x))$ mit $f(y) = y^2$, $g(x) = \sin(x^2)$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{2\sin(x^2)}_{\frac{df}{dy}}\ \underbrace{\frac{d}{dx}\sin(x^2)}_{\frac{dg}{dx}} = 2\sin(x^2)\ \underbrace{\cos(x^2)\ 2x}$$

(ii) 5. Ableitung einer inversen Funktion:

$f(x) = y = \sin x \Rightarrow x = \arcsin y$ (Arkussinus)



(Spiegelung von $\sin x = y$ an Diagonalen $x = y$)

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\arcsin y = \frac{1}{\frac{d\sin x}{dx}\Big|_{x=\arcsin y}}$$

$$= \frac{1}{\cos x\big|_{x=\arcsin y}}$$

$$\overset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}\,\Big|_{x=\arcsin y}}$$

$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

1.5 Wichtige Ableitungen

- $(\text{const})' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{Z})$
- $(x^a)' = ax^{a-1} \quad (x > 0, \quad a \in \mathbb{R})$ $\rightarrow f(x) = \sqrt{x} = (x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = (\ln a)\, a^x \quad (a > 0)$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\quad x \neq (\frac{1}{2} + n)\pi, \ n \in \mathbb{Z}$ (Nullstellen von $\cos x$)
- $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- $(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$
- $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1)$
- $(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$