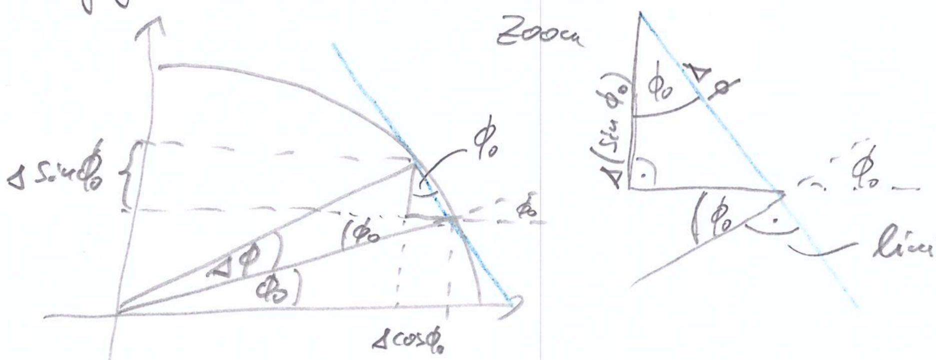
1.3 Example: derivative of the sine function by geometric means



$$\frac{d}{d\phi}\sin\phi_0 = \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{\Delta(\sin\phi)\big|_{\phi=\phi_0}}{\Delta\phi} = \cos\phi_0$$

1.4. Rules of differentiation

(i) linearity $\qquad (\lambda f(x) + \mu g(x))' = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$

(ii) product rule $\qquad (f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

(iii) chain rule $\qquad h(f(g(x))) = \left.\frac{df}{dy}\right|_{y=g(x)} \frac{dg}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$

(iv) quotient rule $\qquad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$

(v) derivative of an inverse function $\qquad (f^{-1}(y))' = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(y)}}$

1.5 Important derivatives

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

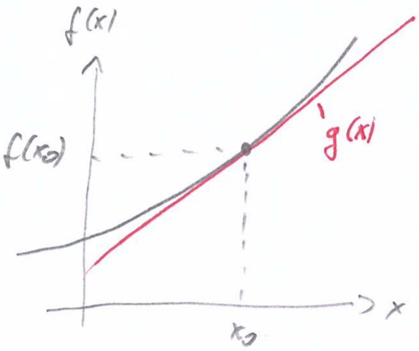
$$= \frac{\cos^2 + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

1.6 Taylor-Entwicklung

Ziel: Näherung einer Funktion durch ein Polynom

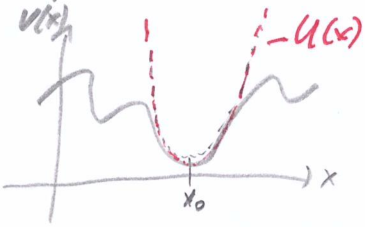
- lineare Näherung: $f(x) = \underbrace{\underset{\uparrow}{f(\overset{\text{Entwicklungspunkt}}{x_0})} + f'(x_0)(x-x_0)}_{g(x)} + O((x-x_0)^2)$



$\Rightarrow g(x_0) = f(x_0)$ und $g'(x_0) = f'(x_0)$

Bem.: Rechnung mit allgemeiner Funktion $f(x)$ oft komplizierter als mit linearer Näherung $g(x)$.
$\Rightarrow$ Linearisierung

- quadratische Näherung: Potenzial $V(x)$ und quadratische/„harmonische" Näherung $U(x)$ um x_0.



$$V(x) = \underbrace{V(x_0) + V'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2}_{U(x)} + O(|x-x_0|^3)$$

$\Rightarrow U(x_0) = V(x_0)$, $\underset{\text{gleiche Steigung}}{U'(x_0) = V'(x_0)}$, $\underset{\text{gleiche Krümmung}}{U''(x) = V''(x_0)}$

check: $U'(x) = V'(x_0) + V''(x_0)(x-x_0) \Rightarrow U'(x_0) = V'(x_0)$
$U''(x) = V''(x_0)$

(Vorbereitende) Definition:

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \overset{\text{Teilmenge}}{\subset} \mathbb{R}$ heißt (n mal) stetig differenzierbar, wenn f im Intervall D (n-mal) differenzierbar ist und $f^{(n)}(x)$ stetig ist.

(Schreibweise: $f \in C^n(D)$)

„continuously differentiable"

Bem.: - Ist f beliebig oft differenzierbar, so nennt man f eine $C^\infty(D)$-Funktion.
- In der Physik sind Funktionen in der Regel diffbar, Knicke, Sprünge... sind eher selten.

Satz von Taylor:

Jede Funktion $f \in C^{n+1}(D)$ auf einem offenen Intervall D lässt sich für $x, x_0 \in D$ auf folgende Weise nach Potenzen entwickeln:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}_{\text{Taylor-Polynom } n\text{-ter Ordnung}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Restglied}}}$$

also: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x)$$

Restglied: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ mit ξ zwischen x und x_0

Beispiel: (i) Exponentialfunktion:

$f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ entwickelt um $x_0 = 0$:

Check: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ✓

$f^{(k)}(x) = e^x$ also $f^{(k)}(x_0) = 1$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + R_n(x)$$

Bem: $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, also: $e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$

(k! wächst schneller als x^k)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

(ii) Geometrische Reihe:

$f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$f''(x) = 2 \frac{1}{(1-x)^3}$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = k! \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$

$\Rightarrow f^{(k)}(x_0) = k!$

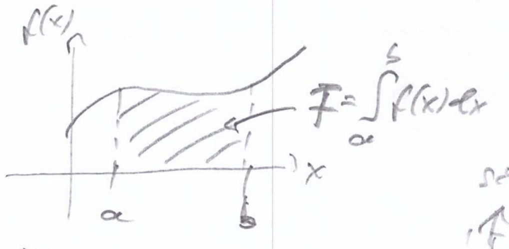
$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\,(x-x_0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

aber nur im Konvergenzradius $|x| < 1$

also: $x \in (-1, 1) =]-1, +1[$

1.7 Eindimensionales Integral

(i) Intuition: Fläche unter der Kurve



Frage: $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = ?$

(ii) Anwendung: Umkehrung der Ableitung

Bsp.: Ort $x(t)$ bei gegebener Geschwindigkeit $v(t)$ & Startpunkt $x_0 = x(t_0)$

Aus $\frac{dx}{dt} = v(t)$ folgt:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dx}{dt}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$$

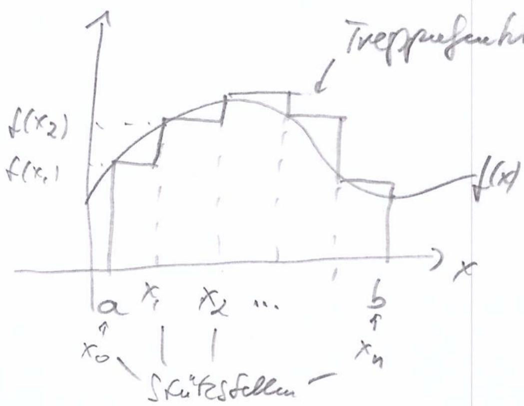
$$\Leftrightarrow \quad x\Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt \Rightarrow x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$$

(iii) Formaler: Cauchy-Integral

Idee: Näherung einer Funktion als Treppenfunktion

Treppenfunktion $t_n(x)$ (hier mit 5 Stufen)



Abstand der Stützstellen: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$\Rightarrow$ Stützstellen bei $x_i = a + i\Delta x,\ i = 0, \dots, n$

Check: $x_n = a + n\Delta x = a + n\frac{b-a}{n} = b$ ✓

Fläche unter der Treppenfunktion: $$F_n = \int_a^b t_n(x)\,dx = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}}_{\text{Summe der Rechtecke}} \underbrace{f(x_i)\,\Delta x}_{\text{Fläche des } i\text{-ten Rechtecks}}$$