1.6 Taylor expansion

idea: approximate f(x) by a polynomial involving its derivatives

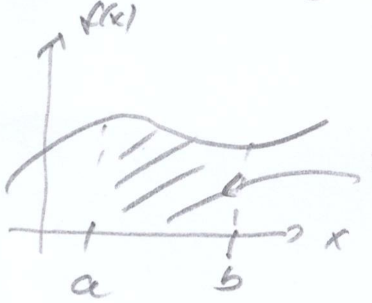
Taylor's theorem: Any $f \in C^{n+1}(D)$ defined on an open set $D \subset \mathbb{R}$ can be expressed by

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k}_{\text{Taylor polynomial}} \underbrace{+R_n(x)}$$

with $x, x_0 \in D$ and the remainder term $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\overset{\text{between } x \text{ and } x_0}{\xi})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

1.7 1D integrals

(i) area under the curve/function



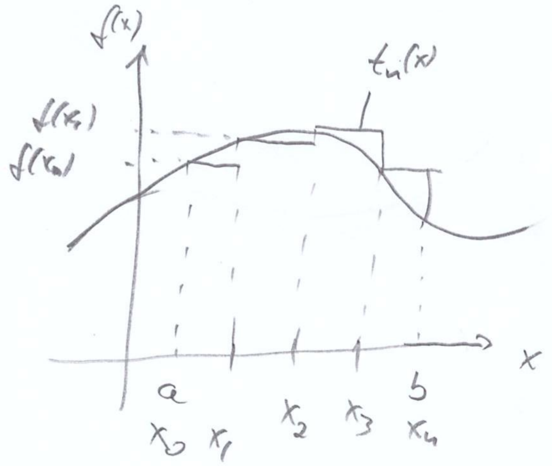
$$F = \int_a^b f(x)\,dx$$

(ii) application: antiderivative

$$\begin{tikzcd} x(t_0)+\int_{t_0}^{t} v(s)ds = x(t) \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dt}"] & \dot{x} = v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \arrow[l, bend left, "\int dt"] \end{tikzcd}$$

(iii) Cauchy integral

idea: approximation of F by step functions



spacing of meshpoints: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$F_n = \int_a^b t_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x$$

Integral:

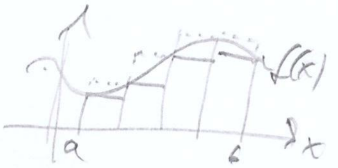
$$F = \lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$$

° Das **Integral** über $f(x)$ ist definiert als

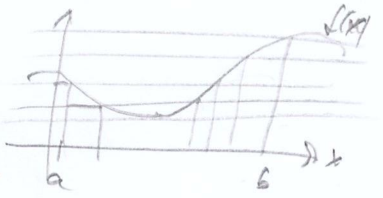
$$F = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underset{\uparrow}{F_n} = \lim_{\underset{\nearrow}{n\to\infty}} \int_a^b t_n(x)\,dx$$

immer feinere Stufen

Bem: Alternative Zugänge: - Riemann-Integral



- Lebesgue-Integral



1.8 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Satz: (i) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist für jedes $x_0 \in \overset{\text{Intervall}\swarrow}{I}$

die **Integralfunktion** $F: I \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\tilde{x})\,d\tilde{x}$ (Fläche unter f im $[x, x_0]$)

differenzierbar und eine **Stammfunktion** von f.

(D.h.: für alle $x \in D$ gilt: $F'(x) = f(x)$)

(ii) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf $[a,b]$ mit Stammfunktion $F: [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Bem: Stammfunktionen nennt man auch **unbestimmte Integrale**

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ohne Grenzen}}}{\int} f(x)\,dx = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{eine mögliche}\\ \text{Stammfunktion}}}{F(x)} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Integrationskonstante}}}{C}$$

⇒ Stammfunktionen unterscheiden sich um eine Konstante (fällt beim Ableiten weg)

1.9 Integrationsregeln

Integrationsregeln:

1. **gleiche Integrationsgrenzen:**

$$\int_a^a f(x)\mathrm{dx} = 0.$$

2. **umgedrehte Integrationsgrenzen:**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = -\int_b^a f(x)\mathrm{dx}.$$

3. **Additivität bzgl. der Integrationsgrenzen:**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} + \int_b^c f(x)\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\mathrm{dx}.$$

schnell zu zeigen über Definition der Stammfunktion

4. **Linearität:** Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{dx} = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{dx} + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{dx}.$$

Linearität der Treppenfunktion/Summen

5. **Partielle Integration:**

$$\int_a^b (f'(x)\,g(x))\,\mathrm{dx} = f(x)\,g(x)|_a^b - \int_a^b (f(x)\,g'(x))\,\mathrm{dx}.$$

Produktregel

6. **Substitution:**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}}\mathrm{dt} \quad \text{oder} \quad \int_a^b f(u(x))\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}\mathrm{dx} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\mathrm{dt}.$$

Kettenregel

1) $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$

2) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\left(F(a) - F(b)\right) = -\int_b^a f(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \cancel{F(b)} - F(a) + F(c) - \cancel{F(b)} = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$

4) folgt aus der Linearität von Summen über Treppenfunktionen

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda f(x_i) + \mu g(x_i))\Delta x\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\lambda\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x + \mu\sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)\Delta x\right]$$

$$= \lambda \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x + \mu \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)\Delta x$$

$$= \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

5) folgt aus Produktregel der Ableitg:

$$(fg)' = f'g + g'f$$

$$\Rightarrow \int_a^b (f(x)g(x))'dx = \int_a^b [f'(x)\cdot g(x) + f(x)g'(x)]dx$$

$$\Rightarrow f(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b f'(x)\,g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$$f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

Bem: wichtg für Elektrodynamik & Quantenmechanik
in vielen zentralen Herleitgen
- für Berechng von Integralen

Bsp

$$\int \ln x\,dx = \int \overset{f'}{1}\cdot \overset{g}{\ln x}\,dx$$

$$= \underset{f}{x}\,\underset{g}{\ln x} - \int \underset{f}{x}\,\underset{g'}{\frac{1}{x}}\,dx$$

$$= x\ln x - x$$

6) Verkettg von F mit u:

$$\left(F(u(x))\right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} F'(u(x))\cdot u'(x) = f(u(x))\,\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(u(x))\,\frac{du}{dx}\,dx = \int_a^b \left(F(u(x))\right)'dx$$

$$= F(u(b)) - F(u(a))$$

$$= \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt$$

Bsp.: $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\sin(x^2)}_{\substack{f(u(x)) \\ \uparrow \\ x^2}}\ \underbrace{2x}_{u'(x)}\,dx = \int_{u(x_0)}^{u(x_1)} \sin(u)\,du$

Lesen als: - Wechsel der Integrationsvariable von u nach x entspricht

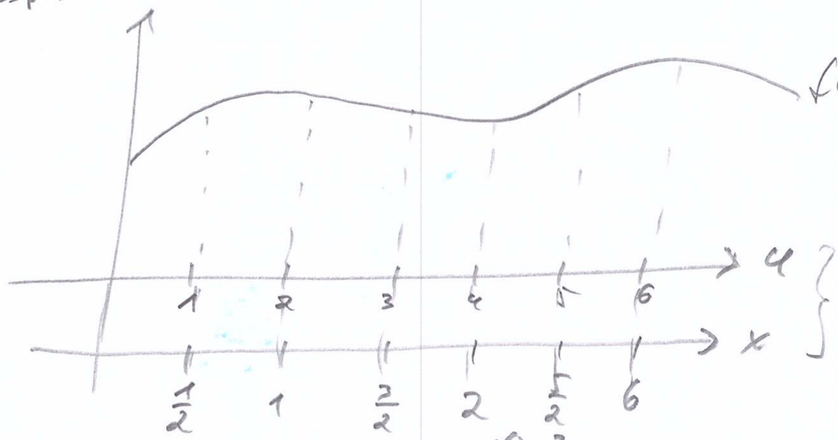
- Koordinatenwechsel: f als Funktion von x statt u.

$$\int_{u_0}^{u_1} f(u)\,du = \int_{x_0=x(u_0)}^{x_1=x(u_1)} f(u(x))\,\frac{du}{dx}\,dx \leftarrow \text{neue Integrationsvariable}$$

Schrittweite in u pro Schrittweite in x

Grenzen durch x statt u ausgedrückt

Bsp.:



Hier: $u = 2x \Rightarrow x(u) = \frac{1}{2}u$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2$

$$\int_1^6 f(u)\,du = \int_{\boxed{\frac{1}{2}}}^{\boxed{3}} f(u(x))\cdot 2\,dx$$

$x(6) = 3$

$x(1) = \frac{1}{2}$

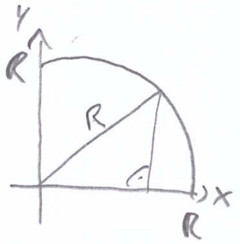
Korrektur für kürzeres Integrationsintervall

Beispiele: Inverse Operation zur Ableitung

↳ Liste mit Funktionen, Ableitungen und Integralen

1.10 Berechnen von Integralen: Beispiel & Tricks

(i) Fläche eines Viertelkreises : $\frac{\pi R^2}{4}$



Pythagoras

$$F = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

$$= R \int_0^R \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}\, dx$$

$u = \frac{x}{R} \Rightarrow u' = \frac{1}{R} = \frac{du}{dx}$
$= dx = R dx$

$$= R \int_{u(0)}^{u(R)} \sqrt{1 - u^2}\, R du$$

$$= R^2 \int_0^1 \sqrt{1 - u^2}\, du$$

$u = \cos t \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\sin t$
$\Rightarrow t = \arccos u$
$t(0) = \frac{\pi}{2}$
$t(1) = 0$

$$= R^2 \int_{t(0)}^{t(1)} \underbrace{\sqrt{1 - \cos^2 t}}_{\sin(t)}\, (-\sin t)\, dt$$

$$= R^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin^2 t\, dt$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin t}_{f'}\, \underbrace{\sin t}_{g}\, dt$$

Nebenrechnung

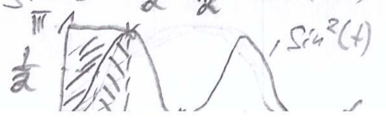
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = \underbrace{-\cos t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{-\cos t}_{f}\, \underbrace{\cos t}_{g'}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow F = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = R^2 \frac{\pi}{4}$$ ✓

Check: $\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t)$



(ii) Ableiten nach Parameter

Idee: Vertauschen von Ableitung und Integration
(meistens OK, aber Vorsicht bei Parameterabhängigen Grenzen!)

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{d\alpha} F(\alpha) = \int_a^b \frac{d f(x,\alpha)}{d\alpha}\,dx.$$

Bsp.: $F = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

Beobachtg: n-mal partiell integrieren arbeitet x^n weg.
$\hookrightarrow$ langwierig!!!

$$\hookrightarrow \text{Idee: } \tilde{F}(\alpha) = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\,dx \quad , \quad \tilde{F}(\alpha)\Big|_{\alpha=1} = F$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{(-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n}}_{} e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} \underbrace{\frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty}_{=\frac{1}{\alpha}}$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} (\alpha)^{-1}$$

$$= \underbrace{(-1)^n (-1)(-2)\dots(-n)}_{} \alpha^{-n+1}$$

$$\tau^{-n+1}$$

$$= n!$$

$$= \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \tilde{F}(1) = n! = F$$

Bem: Verallgemeinerung der Fakultät möglich: Gamma-Funktion

$$\Gamma(z) := \int^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt \quad , \quad \Gamma(n+1) = n!$$