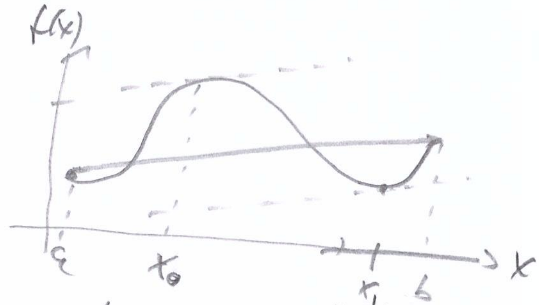
1.11 Improper integrals

- integration of functions with singularities or unbounded limits
- sometimes, it works, but sometimes, it does not

1.12 Mean value theorems

- Differentiation: Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be a continuous function on the closed interval $[a,b]$ and differentiable on (a,b). Then, there exists some $x_0\in(a,b)$ such that

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



$$f'(x_1)=f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- integration: Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be a continuous function. Then, there exists a $x_0\in[a,b]$ such that

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(x_0)(b-a).$$

↳ equal area rule (Maxwell construction)

2. Mehrdimensionale Analysis

Grundidee: Funktionen mehrerer Variablen

- Höhe eines Gebirges $h = h(x,y)$
- Temperatur im Raum $T = T(x,y,z)$
- zeitabhängige Potenziale $V = V(t, x,y,z)$
- thermodynamische Zustandsgleichungen: $f(p,V,T) = 0$

etwa: $pV = nRT$ (ideales Gas)

Bem: hier (Kap 2) nur skalare Funktionen. Für vektorielle Funktionen s. Kap. 4 Vektoranalysis

2.1 Partielle Ableitung

Def: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$. Dann heißt die Ableitung nach einer Variablen (bei Festhalten aller anderen) partielle Ableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots x_n)}{\Delta x_i}$$

Bem.: • "∂" : "de", "del", Ableitungskringel ...

• $n=2$, $f(x,y)$: Notation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \equiv \partial_x f(x,y) \equiv f_x(x,y) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \equiv \partial_y f(x,y) \equiv f_y(x,y) := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Bsp.: (i) $f(x,y) = x^2 + xy^3$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^3$ (y als Konstante behandelt!)

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2$ (x —— " ——)

(ii) höhere Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} f = f_{xx} = 2, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f \equiv f_{xy} = 3y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f \equiv \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f \equiv f_{yx} = 3y^2, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} f \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} f \equiv f_{yy} = 6xy$$

Satz von Schwarz: Für stetig differenzierbare Funktionen ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen egal:

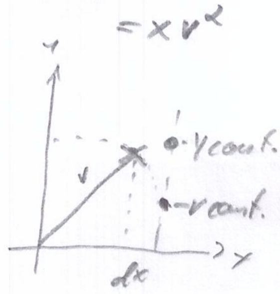
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y).$$

Bem.: • $\partial_x \partial_y = \partial_y \partial_x$: symmetrischer Operator

• ggf. festgehaltene Koordinaten explizit angeben: $f(x,y) = x(x^2+y^2) = xr^2$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y}_{\uparrow\ \text{const.}} = 3x^2 + y^2 \neq \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_r}_{\uparrow\ \text{const}} = r^2 = x^2 + y^2$$

(etwa Nebenbedingung) ($\to$ 2.7)



2.2 Das totale Differenzial

Idee: Änderung einer Funktion $f(x,y)$ $(f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ bei gleichzeitigen kleinen Änderungen von x und y um Δx bzw. Δy:

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) \overbrace{- f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y)}^{=0} - f(x,y)$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}} \Delta x + \underbrace{\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}} \Delta y$$

$$\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x, \underbrace{y+\Delta y}) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \Delta y$$

$\to y$ für Δy infinitesimal

Für infinitesimale $\Delta x, \Delta y$ $(\Delta x \to dx, \Delta y \to dy)$ gilt:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}$$

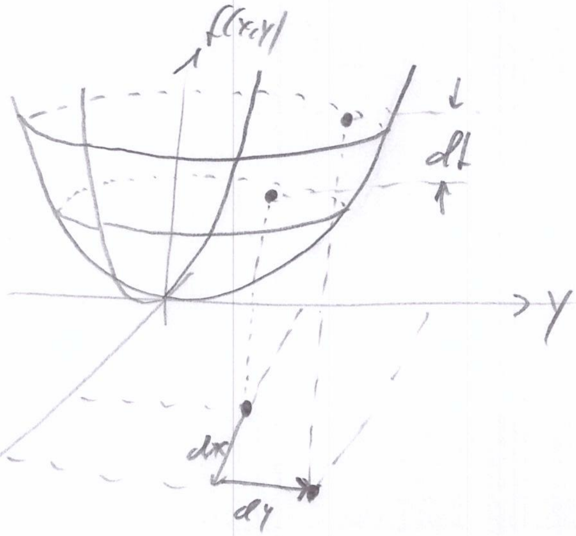
Def: Das **totale Differenzial** von $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch:

$$df := \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Bsp.: Totales Differenzial von $f(x,y) = x^2 + y^2$:

$$df(x,y) = 2x\,dx + 2y\,dy$$

Rotations-paraboloid



2.3 Totales Differenzial & Ableitungsregeln

- mehrdimensionale Kettenregel für $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f=f(x_1,\dots,x_n)$ mit $x_i = \overset{\text{i. Koordinate}}{x_i}(\overset{\text{Zeit}}{t})$:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i \quad \text{mit } dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}\, dt \quad i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}\, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}}$$

Bem: $n=1$ ✓ siehe 1.4 Ableitungsregeln $h(x)' \overset{h(g(x))}{=} \frac{dh}{dy}\Big|_{y=g(x)} \frac{dg}{dx} = \frac{dh}{dg}\frac{dg}{dx}$

Bsp: Schwerpunkt von n Massen m_i an den Orten $x_i(t)$ mit Gesamtmasse

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i : \quad R(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i(t)$$

Massen m_i mit x_i gewichtet

Frage: Geschwindigkeit des Schwerpunkts:

(i) Linearität: $\frac{dR(t)}{dt} = \frac{d}{dt} M^{-1} \sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i(t)$

$$= M^{-1} \sum_{i=1}^{n} m_i\, \dot{x}_i(t) \quad \text{mit } m_i \text{ gewichteter Mittelwert}$$

(ii) Kettenregel: $\frac{d}{dt} R(x(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial x_i} \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial t}}_{=\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}}$ x_i hängt nur von t ab

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{n} m_j x_j$$

(Achtung: Summationsindex hier j)

$$= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{n} m_j \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{=\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } j=i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}}$$

Kronecker-Delta

nur $j=i$ bleibt

$$= \frac{1}{M} m_i$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M} x_i$$