2. Multidimensional analysis

2.1. Partial derivatives

Let $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ be a function on $\mathbb{R}^n$ (or an open subset $\Omega \subset$

Then, the partial derivative of f with respect to the i-th variable is

defined as
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

notation $\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \partial_{x_i} f \equiv f_{x_i} \equiv D_{x_i} f$

Schwarz's theorem: For $f: \Omega \to \mathbb{R}$ defined on $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, if $\underline{p} \in \Omega$
(Clairaut's)

and f has continuous second partial derivatives on a neighbourhood of $\underline{p}$,

then
$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\underline{p}) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(\underline{p}) \quad \forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}$$

2.2 Total differential

The sum of all partial differentials w.r.t. all independent variables $x_1, \dots, x_n$ is called total differential:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

2.3 Total differentiation and rules of differentiation

- chain rule: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = f(x_1, \dots, x_n)$ with $x_i = x_i(t)$.

  Then: $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}$

• Totale vs. partielle Zeitableitung:

Mechanik: oft implizierte & explizierte Zeitableitungen:

$$f = f(x(t),\ y(t),\ t)$$

Bsp.: $f = x(t)^2 + y(t)^2 + \alpha t$

↳ partielle Ableitung: $\frac{\partial f}{\partial t} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{x,y\ \text{const}} = \alpha$

↳ totale zeitliche Ableitung: tatsächliche/im Experiment beobachtete Änderung von f:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

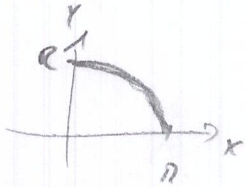
$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = 2x\,\dot{x} + 2y\,\dot{y} + \alpha$$

• implizierte Differentiation:

Idee: Zusammenhang von x und y nur als $f(x,y)=0$, aber nicht $y=y(x)$

Frage: $\frac{dy}{dx} = ?$

↳ Bsp.: (i) Kreis: $f(x,y) = R^2 - x^2 - y^2 = 0$, etwa $x,y \geq 0$



↳ $df = -2x\,dx - 2y\,dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

↳ check $(R,0), (0,R)$

(ii) Ableitung von $y = x^x$, $x>0$:

$\ln y = \ln x^x \Rightarrow f(x,y) = \ln y - x\ln x = 0$

$\Rightarrow df = \frac{1}{y}dy - \left(\ln x + x\,\frac{1}{x}\right)dx = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$

$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x$

Bem: $\lim_{x\to 0} x^x = 1$ z.B. mit Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} x^x = e^{\ln \lim_{x\to 0} x^x} = e^{\lim_{x\to 0} \ln x^x} = e^{\lim_{x\to 0} x \ln x} = e^0 = 1$$

2.4 Der Gradient

Für eine Funktion $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lautet das totale Differenzial

bei $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vektor}}}{\underline{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$: $df(\underline{a}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}}}{\partial_{x_1}} f(\underline{a})\, dx_1 + \dots + \underbrace{\partial_{x_n} f(\underline{a})}_{\partial_{x_n} f(\underline{x})\big|_{\underline{x}=\underline{a}}} dx_n$

Alternative Schreibweise mit Vektoren: $d\underline{x} \equiv \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$

Wir definieren den **Gradienten** von f als

$$\text{grad} f(\underline{a}) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\underline{a}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\underline{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} f(\underline{a}) .$$

$$\Rightarrow df(\underline{a}) = \text{grad} f(\underline{a}) \overset{\text{Skalarprodukt}}{\cdot} d\underline{x} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\underline{a}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\underline{a}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f(\underline{a})\, dx_i$$

Merke: grad f liefert durch Skalarprodukt mit $d\underline{x}$ die Änderung von f unter einer infinitesimalen Verschiebung $d\underline{x}$

Bem.: übliche Schreibweise ist $\underline{\nabla} f(\underline{a}) \equiv \text{grad} f(\underline{a})$ mit dem

Nabla-Operator $\underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} \Rightarrow df(\underline{a}) = \underline{\nabla} f(\underline{a}) \cdot d\underline{x}$

- $\underline{\nabla} f(\underline{a})$ zeigt in Richtung des maximalen Anstiegs von f bei $\underline{a}$:

$$\Delta f = \underline{\nabla} f \cdot \Delta\underline{x} = |\underline{\nabla} f|\,|\Delta \underline{x}| \cos \underset{}{\theta}$$

Winkel zwischen $\Delta\underline{x}$ und $\underline{\nabla} f(\underline{a})$ (Kap. 3.3 Skalarprodukt)

↳ bei $\theta = 0$ ($\Delta\underline{x} \parallel \underline{\nabla} f(\underline{a})$) ist $\cos\theta = 1$

$\Rightarrow \Delta f$ am größten