4.4 (Parameterization of) curves

- curve C (set of points in $\mathbb{R}^n$): parameterized by a function

$$\underline{\alpha} : \underbrace{[a,b]}_{I} \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}$$

- Derivative: $\dot{\underline{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\alpha}_n(t) \end{pmatrix}$ vector tangential on curve C at $\underline{\alpha}(t)$

- regular curve: $\dot{\underline{\alpha}}(t) \neq \underline{0} \quad \forall t \in I$

4.5 Length of a curve

- length of C: $L(C) = \int_a^b |\dot{\underline{\alpha}}(t)| \, dt$

4.5 Integration along curves

- scalar ($f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$): $\int_C f(\underline{x}) \, ds = \int_a^b f(\underline{\alpha}(t)) |\dot{\underline{\alpha}}(t)| \, ds$

- vectorial ($\underline{v}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \mapsto \underline{v}(\underline{x})$): $\int_C \underline{v}(\underline{x}) \cdot d\underline{s} = \int_a^b \underline{v}(\underline{\alpha}(t)) \cdot \dot{\underline{\alpha}}(t) \, dt$

4.7 Parametrisierung von Flächen

Hier: Flächen im $\mathbb{R}^3$

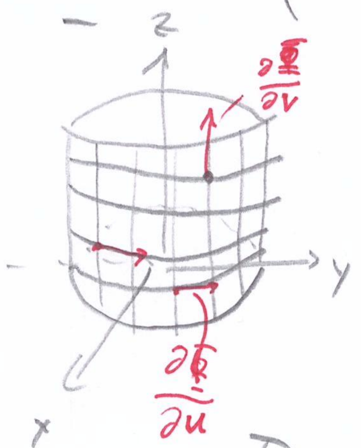
Def: Die Parametrisierung $\underline{\Phi}$ einer Fläche F im $\mathbb{R}^3$ ist eine stetig differenzierbare Abbildung von einem zusammenhängenden Gebiet $B \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$:

etwa $\underbrace{[a,b]}_{\partial u} \times \underbrace{[c,d]}_{\partial v}$

$$\underline{\Phi}: B \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \underline{x} = \underline{\Phi}(u,v)$$

Bsp.: (i) Kreiszylinder mit z-Achse als Symmetrieachse

$$\underline{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ v \end{pmatrix}, \quad \left.\begin{matrix} 0 \le u < 2\pi \\ v \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} B = [0,2\pi) \times \mathbb{R}$$



$\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial u}, \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial v}$: Tangentenvektoren (linear unabhängig!)

häufig abgekürzt als $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$

(ii) Ebene: $\underline{\Phi}(u,v) = \underline{a} + u\underline{b} + v\underline{c}$, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ const

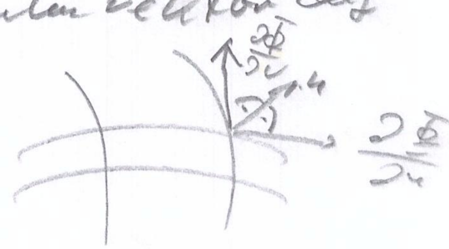
$u, v \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \underline{b} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial u}, \quad \underline{c} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial v}$

$\Rightarrow$ Tangentenvektoren liefern den Normalenvektor auf $\underbrace{\text{der Fläche}}_{\text{ggf. gekrümmten}}$

$$\underline{n} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial v}$$



4.8 Flächenintegrale

1. Skalare Funktionen:

Def.: Das (skalare) Oberflächenintegral einer skalaren Funktion f über die von $\underline{\Phi}$ parametrisierte Fläche $\mathcal{F}$ ist definiert als:

$$\underline{\Phi}: \underbrace{\binom{u}{v}}_{\in B} \mapsto \underline{x} = \underline{\Phi}(u,v)$$

$$\int_{\mathcal{F}} f(\underline{x})\, dA := \int_B f(\underline{x}(u,v)) \underbrace{\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| du\, dv}_{\text{Oberflächenelement}}$$

Bsp.: Fläche der Kugel mit Radius R: $4\pi R^2$

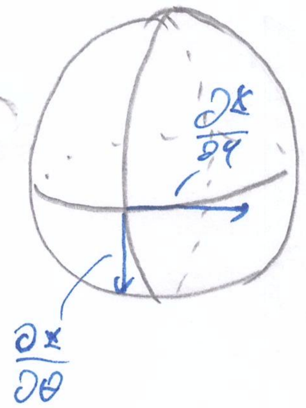
Parametrisierung durch Kugelkoordinaten (s. 2.9.2)

$$\underline{\Phi}: (\theta, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} R \sin\theta \cos\varphi \\ R \sin\theta \sin\varphi \\ R \cos\theta \end{pmatrix} \text{ mit } \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow B = [0,\pi] \times [0, 2\pi)$$

$\Rightarrow$ Oberflächenelement:

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} R \cos\theta \cos\varphi \\ R \cos\theta \sin\varphi \\ -R \sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \sin\theta \sin\varphi \\ R \sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \ldots =$$



$$= R^2 \sin\theta \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ (\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1}) \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{Länge} = 1}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \right| = R^2 \sin\theta$$

$$\Rightarrow dA = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \right| d\theta\, d\varphi = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Rightarrow \text{Oberfläche Kugel} = \int dA = \int_B \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \right| d\theta\, d\varphi$$

Kugeloberfläche

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, R^2 \sin\theta = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta = 4\pi R^2$$