4.7 Parametrization of areas

$[a,b] \times [c,d]$

- area F : parametrized by $\underline{\Phi} : B \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \underline{x} = \underline{\Phi}(u,v)$$

- tangential vectors: $\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial u}$, $\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial v}$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|$$

4.8 Integration over areas

- scalar ($f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$) :

$$\int_F f(\underline{x}) dA = \int_B f(\overbrace{\underline{x}(u,v)}^{\underline{\Phi}(u,v)}) \overbrace{\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right|} du\,dv$$

- recap: spherical coordinates: $r = R$

$$\underline{\Phi} : (\theta, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} R \sin\theta \cos\varphi \\ R \sin\theta \sin\varphi \\ R \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi)$$

$$\Rightarrow B = [0,\pi] \times [0,2\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} R\cos\theta \cos\varphi \\ R\cos\theta \sin\varphi \\ -R\sin\varphi \end{pmatrix} = R\, \underline{\vec{e}}_\theta$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta \sin\varphi \\ R\sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = R\sin\theta\, \underline{\vec{e}}_\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \ldots = R^2 \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = R^2 \sin\theta\, \underline{\vec{e}}_r$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \right| = \ldots = R^2 \sin\theta$$

- $\{\underline{\vec{e}}_\theta, \underline{\vec{e}}_\varphi, \underline{\vec{e}}_r\}$: orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$ (equivalent to $\underline{\vec{e}}_x, \underline{\vec{e}}_y, \underline{\vec{e}}_z$

Bemerkung: (i) Die Parametrisierung der Kugel liefert auch die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten und somit eine Basis $\{\vec{\underline{e}}_r, \vec{\underline{e}}_\vartheta, \vec{\underline{e}}_\varphi\}$ (sogar Orthonormalbasis)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \vartheta} = r \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cos\varphi \\ \cos\vartheta \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} = r \vec{\underline{e}}_\vartheta$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = r \sin\vartheta \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = r \sin\vartheta \, \vec{\underline{e}}_\varphi$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = r^2 \sin\vartheta \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = r^2 \sin\vartheta \, \vec{\underline{e}}_r$$

(ii) Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten: $\{ e$

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \underline{x}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\underline{e}}_\rho$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \rho \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \, \vec{\underline{e}}_\varphi$$

$$= \frac{\partial \underline{x}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{\underline{e}}_z = \vec{\underline{e}}_\rho \times \vec{\underline{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

2. Vektorfelder:

Def: Das (vektorielle) Flussintegral eines Vektorfeldes $\underline{v}$ über die durch $\underline{\Phi}: B \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto \underline{x} = \underline{\Phi}(u,v)$ parametrisierte Fläche F ist definiert als

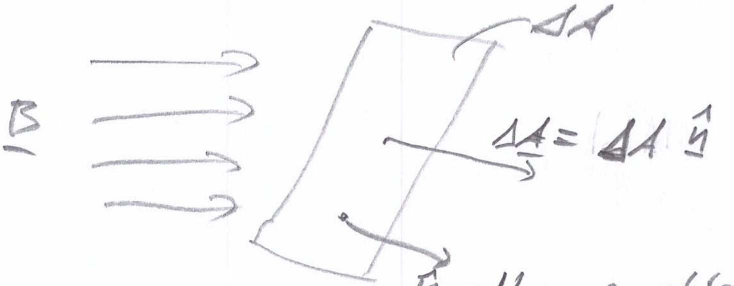
$$\int_F \underline{v}(\underline{x}) \cdot d\underline{A} := \int_B \underline{v}(\underline{x}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right) du\, dv$$

mit dem vektoriellen Oberflächenelement $d\underline{A} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}\, du\, dv$.

↑ hat Richtung!

Achtung: nicht verwechseln mit Parametrisierung $\underline{\Phi}$

Bsp.: (i) Magnetischen Fluss $\Delta\underline{\Phi}$ durch Fläche ΔA

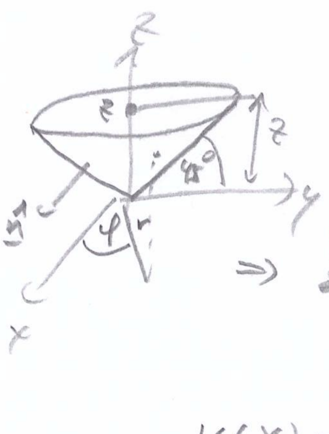


$\hat{\underline{n}}$: Normalenvektor (kann Richtung ändern bei gekrümmten Flächen)

$\Rightarrow$ Gesamtfluss der Fläche F:

$$\underline{\Phi} = \int_F d\underline{\Phi} = \int_F \underline{B} \cdot \hat{\underline{n}}\, dA = \int_F \underline{B} \cdot d\underline{A}$$

(ii) Fluss von $\underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 \\ x^2 y + y^3 \\ x^2 y \end{pmatrix}$ durch $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| z = \sqrt{x^2+y^2},\ z < 2 \right\}$



Parametrisierung von F: $(r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}$, $r \in [0,2]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = r \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}(r,\varphi)) = r^3 \begin{pmatrix} \cos^3\varphi + \cos\varphi \sin^2\varphi \\ \cos^2\varphi \sin\varphi + \sin^3\varphi \\ \cos^2\varphi \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{v} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} \right) = \dots = r^4 \left(1 - \cos^2\varphi \sin\varphi \right)$$

$$r^4 \left(\cos\varphi(\cos^3\varphi + \cos\varphi\sin^2\varphi) + \sin\varphi(\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin^3\varphi) - \cos^2\varphi\sin\varphi \right)$$

$$= r^4 \left(\cos^4\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi - \cos^2\varphi\sin\varphi \right)$$

$$= r^4 \left(\underbrace{\cos^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + \sin^2\varphi \underbrace{(\cos^2 + \sin^2\varphi)}_{=1}}_{=1} - \cos^2\varphi\sin\varphi \right)$$

$$= r^4 \left(1 - \cos^2\varphi\sin\varphi \right)$$

$$\Rightarrow \int_F \underline{v} \cdot d\underline{f} = \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^4 (1 - \cos^2\varphi\sin\varphi)$$

$$= \int_0^2 r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\underbrace{1 - \cos^2\varphi\sin\varphi}_{= 1 - (1-\sin^2\varphi)\sin\varphi = 1 - \sin\varphi + \sin^3\varphi} \right)$$

$$= \dots = \frac{64}{5}\pi$$

4.9 Satz von Gauß

Satz: Für ein Flussintegral eines C^1-Vektorfeldes $\underline{v}: \underline{x} \longmapsto \underline{v}(\underline{x})$ über den Rand/die Oberfläche ∂V eines Volumens V gilt:

$$\int_{\partial V} \underline{v}\cdot d\underline{A} = \int_{V} \mathrm{div}\,\underline{v}\; dV.$$

Bem.:
- Feldlinienwerte auf Oberfläche ∂V $\Leftrightarrow$ Quellen im Innern div
- Notation: Integral über geschlossene Fläche $\int_{\partial V} \to \oint_{\partial V}$
- Elektrostatik: $\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ (ρ: Ladungsdichte)

  differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes der Elektrostatik

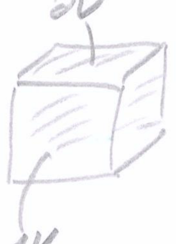
$$\Rightarrow \int_V \underline{\nabla}\cdot\underline{E}\; dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\int_V \rho\, dV}_{Q_{innen}}$$

Q_{innen}: Ladung in V

Satz v. Gauß

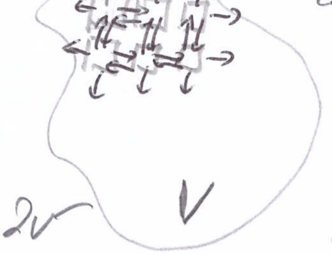
$$\Rightarrow \int_{\partial V} \underline{E}\cdot d\underline{A} = \frac{Q_{innen}}{\varepsilon_0} \quad \text{(integrale Schreibweise)}$$

Idee: (i) Betrachte kleinen Würfel $\underline{X}_W$ mit Volumen ΔV und Oberfläche ∂V $\Rightarrow$ Der Fluss von $\underline{v}$ aus Würfel:



$$\int_{\partial V} \underline{v}\cdot d\underline{A} \approx \mathrm{div}\,\underline{v}(\underline{x}_W)\,\Delta V \quad (\underline{v} \approx \text{const. im Würfel})$$

(ii) Betrachte zusammenhängendes Volumen



Teilvolumen V_i mit Rand ∂V_i am Ort $\underline{x}_i$

Der Fluss aus V ist die Summe der Flüsse aus den Teilvolumina V_i am Rand ∂V_i, weil sich die Flüsse im Innern aufheben.

$$\int_{\partial V} \underline{v}\cdot d\underline{A} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial V_i} \underline{v}\cdot d\underline{A} \approx \sum_{i=1}^{n} \mathrm{div}\,\underline{v}(\underline{x}_i)\,\Delta V_i \xrightarrow[n\to\infty]{\Delta V_i \to 0} \int_V \mathrm{div}\,\underline{v}(\underline{x})\,dV$$

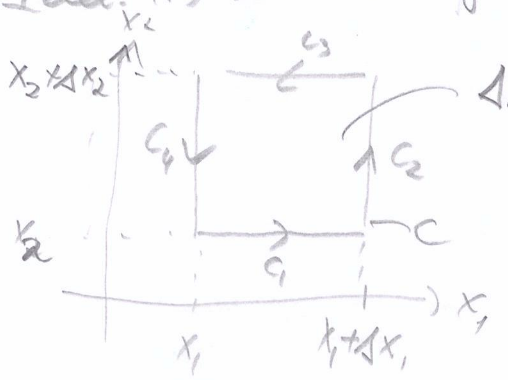
Satz: Für ein Wegintegral eines C^1-Vektorfeldes $\underline{v}: \underline{x} \mapsto \underline{v}(\underline{x})$ über den Rand ∂F einer Fläche F gilt:

$$\int_{\partial F} \underline{v}\cdot d\underline{s} = \int_{F} \operatorname{rot}\underline{v}\cdot d\underline{A}\,.$$

Bem:
- Notation: ∂F ist geschlossener Weg: $\oint_{\partial F}$
- Funktionswerte auf Flächenrand ∂F $\Leftrightarrow$ Wirbel auf Fläche
- Flächenintegral $\int_F \operatorname{rot}\underline{v}\cdot d\underline{A}$ hängt nur vom Rand ∂F ab:

$$\int_{F_1} \operatorname{rot}\underline{v}\cdot d\underline{A} = \int_{F_2} \operatorname{rot}\underline{v}\cdot d\underline{A}$$

Idee: (i) Betrachte geschlossenen Weg in (x_1, x_2)-Ebene



$\Delta A = \Delta x_1 \Delta x_2$

$$\oint_C \underline{v}\cdot d\underline{s} = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_i} \underline{v}\cdot d\underline{s}$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung (S. 1.12) $\quad \varepsilon_1 \in (0, \Delta x_1)$

$$\int_{C_1} \underline{v}\cdot d\underline{s} + \int_{C_3} \underline{v}\cdot d\underline{s} = v_1(x_1+\varepsilon_1; x_2)\,\Delta x_1 - v_1(x_1+\varepsilon_1, x_2+\Delta x_2)\,\Delta x_1$$

$$= -\underbrace{\frac{v_1(x_1+\varepsilon_1, \cancel{x_2} + \Delta x_2) - v_1(x_1+\varepsilon_1, x_2)}{\Delta x_2}}\,\Delta x_1 \Delta x_2$$

$$\underset{\substack{\Delta x_1 \to 0 \text{ also } \varepsilon_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}}{=} -\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_1, x_2)\,\Delta x_1 \Delta x_2$$

$\varepsilon_2 \in (0, \Delta x_2)$

$$\int_{C_2} \underline{v}\cdot d\underline{s} + \int_{C_4} \underline{v}\cdot d\underline{s} = v_2(x_1+\Delta x_1, x_2+\varepsilon_2)\,\Delta x_2 - v_2(x_1, x_2+\varepsilon_2)\,\Delta x_2$$

$$= \underbrace{\frac{v_2(x_1+\Delta x_1, x_2+\varepsilon_2) - v_2(x_1, x_2+\varepsilon_2)}{\Delta x_1}}_{\Delta x_1 \to 0,\ \Delta x_2 \to 0,\ \varepsilon_2 \to 0}\,\Delta x_1 \Delta x_2$$

$$= \frac{\partial v_2}{\partial \ldots} \qquad \Delta x_1 \Delta x_2$$

$$\Rightarrow \int_C \underline{v} \circ d\underline{s} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \Delta x_1 \Delta x_2$$

$$= \underbrace{\left(\mathrm{rot}\, \underline{v} \right)_3}_{\text{Anteil von rot } \underline{v} \text{ in Richtg Flächennormale}} \quad \underbrace{\Delta x_1 \Delta x_2}_{\text{eingeschlossene Fläche}}$$

(ii) Betrachte Wegintegral entlang ∂F:

Teilfläche F_i mit Rand ∂F_i am Ort $\underline{x}_i$ und Flächennormalen $\hat{\underline{n}}_i$.

Wegintegral entlang ∂F ist Summe der Wegintegrale um F_i am Rand, weil sich Wegintegrale im Inneren aufheben:

$$\oint_{\partial F} \underline{v} \circ d\underline{s} = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\partial F_i} \underline{v} \circ d\underline{s}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rot}\, \underline{v}(\underline{x}_i) \circ \hat{\underline{n}}_i \underbrace{\Delta x_1 \Delta x_2}_{= \Delta A_i}$$

$$\xrightarrow[\Delta A_i \to 0]{n \to \infty} \int_F \mathrm{rot}\, \underline{v}(\underline{x}) \circ d\underline{A}$$