

§.1 Complex numbers (definitions and basic calculations)

63a

$$z = a + ib = r e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \text{ with } a, b, r, \varphi \in \mathbb{R}, r \geq 0, i^2 = -1$$

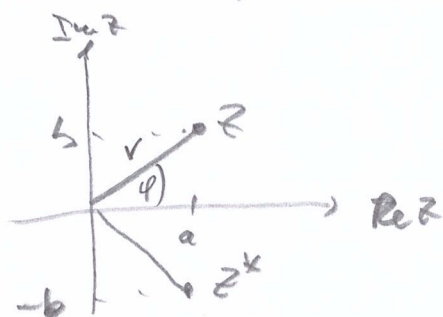
$a = \operatorname{Re}(z)$: real part, $b = \operatorname{Im}(z)$: imaginary part

$r = |z|$: absolute value, $\varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$: argument
 $= \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \sqrt{z z^*}$, $z^* = a - ib$ complex conjugate $\hookrightarrow$ Watch out of signs of a, b
 $\hookrightarrow$ arctan2-function! : $\arctan2(x, y)$

§.2 Complex plane

multi-valued phase: $z = r e^{i\varphi} = r e^{i(\varphi + n2\pi)}$, $n \in \mathbb{Z}$



multiplication:

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) \\ = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

§.3 complex exponential

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Euler's formula: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

Complex logarithm: $\ln z = \ln r + i(\varphi + n2\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$ multi-valued!

Koenig's set: $f_c(z) = z^2 + c$ with varying c and $z_0 = 0$

Julia set: $f_c(z) = z^2 + c$ with fixed c and varying z_0

Complex numbers as matrices:

$$z = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{I}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{J}} \triangleq a + ib$$

$\mathbb{I}^2 = \mathbb{I}$ $\mathbb{J}^2 = -\mathbb{I}$

6 Elemente der linearen Algebra

70

Wichtig für: - Quantenmechanik
- Mechanik
- Differentialgleichungen
- Fourier-Transformationen
- Datenanalyse
- ...

6. Elemente der linearen Algebra

- 6.1 Lineare Gleichungen
- 6.2 Vektorräume
- 6.3 Linearkombinationen, lineare Hülle, Erzeugendensysteme
- 6.4 Basis eines Vektorraums
- 6.5 Matrizen als Darstellung linearer Abbildungen
- 6.6 Matrizenrechnung
- 6.7 Rang einer Matrix
- 6.8 Lösen linearer Gleichungssysteme, Gaußsches Eliminationsverfahren
- 6.9 Invertieren von Matrizen
- 6.10 Determinante
- 6.11 Basiswechsel und Koordinatentransformationen
- 6.12 Eigenwertproblem
- 6.13 Diagonalisieren von Matrizen
- 6.14 Orthogonale, unitäre, hermitesche Matrizen

Herausforderung: Lineare Algebra meist 2 volle VL in Mathematik!

↳ hier: 2-3 Wochen nur!

=> Auswahl / Übersicht / Physik brille

Achtung: viele Definitionen!

↳ Vokabellernen (damit wir uns überhaupt darüber unterhalten können)

Fokus: Intuition, Veranschaulichung, Beispiele, Physik

6.1 Lineare Gleichungen

71

Def: Lineare Gleichungen $L(u) = v$ sind definiert durch:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2) \\ 2) \quad L(\alpha u) = \alpha L(u) \end{array} \right\} u_1, u_2, u: \text{Zahlen oder Vektoren}$$

Bsp.: (i) Schwingungsgleichung: $\underbrace{\left(m \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + k \right)}_{\text{Stokeschen Reibung}} x(t) = F(t)$

(ii) Poisson-Gleichung (etwa $n=2$): $\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}_L u(x,y) = v(x,y)$

(iii) Lineares Gleichungssystem: $\left. \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = y_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = y_2 \end{array} \right\}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(iv) Schrödinger-Gleichung: $i\hbar \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{L_1} \psi = - \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \Delta}_{L_2} \psi + V \psi$

(v) Maxwell-Gleichungen: $\underbrace{\nabla \cdot \underline{E}}_{\frac{\rho}{\epsilon_0}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \underline{\nabla \times \underline{E}} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$

$$\underline{\nabla \cdot \underline{B}} = 0 \quad \underline{\nabla \times \underline{B}} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

Gegenbeispiel: Newtonsche Reibung:

$$m \ddot{x} + \underbrace{\tilde{f}(\dot{x})^2}_{\text{quadratisch}} = F(t)$$

$\Rightarrow$ Lineare Gleichungen sind nicht lösbar, wenn die Reibung quadratisch ist.

§2 Vektorräume

Def: Eine nichtleere Menge V mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt **Vektorraum** über einem Körper K (meist $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), wenn für alle $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt:

- | | | |
|--|-------------------|-------------------------------------|
| (V1) $\underline{v} + \underline{w} \in V, \lambda \cdot \underline{v} \in V$ | Abgeschlossenheit | } Abelsche
kommutative
Gruppe |
| (V2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ | Assoziativität | |
| (V3) $\exists \underline{0} \in V : \underline{u} + \underline{0} = \underline{u}$ | neutrales Element | |
| (V4) $\exists \underline{u}' \in V : \underline{u} + \underline{u}' = \underline{0}$ | inverses Element | |
| (V5) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ | Kommutativität | |
| (V6) $\lambda \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \lambda \cdot \underline{u} + \lambda \cdot \underline{v}$ | Distributivität | |
| (V7) $(\lambda + \mu) \cdot \underline{u} = \lambda \cdot \underline{u} + \mu \cdot \underline{u}$ | | |
| (V8) $(\lambda \mu) \cdot \underline{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{u})$ | | |
| (V9) $1 \cdot \underline{u} = \underline{u}$ | | |

Def: Die Elemente eines Vektorraums heißen **Vektoren**.

↳ Vektoren: mathematisches Objekt, das man addieren und mit einem Skalar multiplizieren kann. Es ist fest vor $\underline{v} \cdot \underline{w}$ nicht notwendig!

↳ nicht unbedingt nur Pfeile in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ (etwa $K = \mathbb{R}$)

BSP: (i) $V = K^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mid v_1, v_2, \dots, v_n \in K \right\}$

(ii) Polynomraum Pol_n für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$V = \{ a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in K \quad \forall i \}$$

(iii) Funktionenraum:

$$V = \{ f: M \rightarrow K \mid \text{mit } f+g: x \mapsto f(x)+g(x), \alpha \cdot f: x \mapsto \alpha f(x) \}$$

Def: Eine nichtleere Teilmenge U eines K -Vektorraums V 73

heißt **Untervektorraum**, wenn für $u, v \in U$, $\lambda \in K$ gilt:

$$(U1) \quad u + v \in U$$

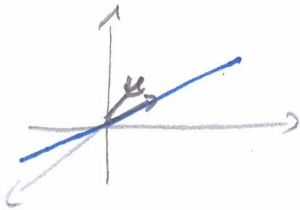
$$(U2) \quad \lambda u \in U$$

Bem: Untervektorräume (Teilräume) sind Vektorräume

Bsp: (i) Lösungen $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ von $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ bilden

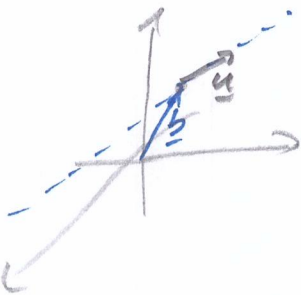
einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$:

(ii) Gerade in $\mathbb{R}^3$ in Richtung $\underline{u}$: $g = \{ \underline{x} = \underline{u} t \mid t \in \mathbb{R} \}$



Gegenbeispiel: um $b \neq 0$ (nicht parallel) zu $\underline{u}$ verschobene Gerade

$g' = \{ \underline{x} = \underline{u} t + \underline{b} \mid t \in \mathbb{R} \}$: kein Untervektorraum!



$$\text{etwa: } 2 \cdot \underline{x}(t=0) = 2\underline{b} \notin g'$$

$\Rightarrow$ **affiner Teilraum / Unterraum**

6.3 Linearkombinationen, lineare Hülle (Aufspann),

76

Erzeugendensysteme

Def: Jeder Vektor der Form

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \quad \alpha_i \in K$$

heißt **Linearkombination** der Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$.

Def: Die Menge aller Linearkombinationen aus $v_1, \dots, v_n$ heißt ihr **Aufspann** (**lineare Hülle, Erzeugnis**): $\text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$

Bsp: $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$ (auch ohne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$)

↳ Der Aufspann ist ein Teilraum von V .

Def: Ist $X \subseteq V$ und $\text{Span}(X) = U$ ein Teilraum von V

(alle Elemente von U sind Linearkombinationen von X

$$\forall u \in U: u = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \quad x_i \in X, \alpha_i \in K),$$

so nennt man X ein **Erzeugendensystem** von U . (X erzeugt U)

Def: U heißt **endlich erzeugt**, wenn U ein endliches Erzeugendensystem hat.

Def: Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ heißen **linear unabhängig**,

$$\text{wenn aus } \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \underline{0} \text{ folgt: } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Ansonsten heißen sie **linear abhängig**.

Alternativ (i) $v_1, \dots, v_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn

für jede echte Teilmenge T von $\{v_1, \dots, v_n\}$ gilt:

$$\text{Span}(T) \subsetneq \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$$

D.h.: T spannt nur einen Teil von $\text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ auf.

(ii) linear unabhängig, wenn sich kein v_i durch Linearkombinationen der anderen $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ darstellen lässt.