7.4 Linear inhomogeneous DEs

$$L[y(x)] = b(x) \Rightarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

homogeneous solution $L[y_h(x)] = 0$ particular solution $L[y_p(x)] = b(x)$

7.3 (v) Power series

ansatz: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1}, \; y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) (x-x_0)^n$

- ↳ insert into DE
- ↳ sort by powers of x
- ↳ determine a_n by comparison of coefficients
- ↳ recursion equations for a_n

7.5 Partielle DGLs

Bsp.: (i) Laplace-Gleichg: $\Delta\phi \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi = 0$

(ii) Wellengleichg: 1D $\quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = 0$

3D $\quad \underbrace{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)}_{=:\,\Box \text{ D'Alembert-Operator}} u(\underline{x},t) = 0$

(iii) Diffusionsgleichg:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

(iv) Navier-Stokes-Gleichg (inkompressible Strömungen):

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v} - \Delta\underline{v} = -\underline{\nabla}p \qquad \text{mit } \underline{\nabla}\cdot\underline{v} = 0$$

Strömungsgeschwindigkeit $\quad$ Druck

(v) Korteweg-de-Vries-Gleichg

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

: Ausbreitg von Wellen in flachem Wasser

↳ Solitonen (Wellenberg mit Geschwindigkeit c)

$$u(x,t) = v(\underbrace{x-ct}_{=:\,z}) \equiv v(z)$$

mit $v(z), v'(z), v''(z) \to 0$ für $z \to \infty$

$\Rightarrow -c\,v'(z) + 6\,v(z)\,v'(z) + v'''(z) = 0$

$$\frac{d}{dz}\underbrace{\left(-c\,v(z) + 3\,v(z)^2 + v''(z)\right)}_{=\text{konstant} = 0 \text{ wegen Randbed.}} = 0$$

$$\Leftrightarrow -c\,v(z) + 3v(z)^2 + v''(z) = 0 \qquad \big| \cdot v'(z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dz}\underbrace{\left(-\frac{c}{2}v(z)^2 + v(z)^3 + \frac{1}{2}v'(z)^2\right)}_{=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\underbrace{v'(z)^2}_{\left(\frac{d}{dz}v(z)\right)^2} + v(z)^2\left(v(z) - \frac{c}{2}\right) = 0$$

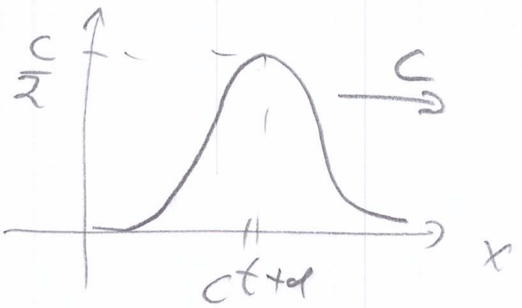
$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dz}v(z)\right)^2 = v(z)^2\left(c - 2v(z)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dv(z)}{dz} = v(z)\sqrt{c - 2v(z)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{v\sqrt{c-2v}}\,dv = \int dz$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow v(z) = \frac{c}{2}\,\frac{1}{\cosh^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(z-d)\right]} = \frac{c}{2}\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}z\right]$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{c}{2}\,\frac{1}{\cosh^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct-d)\right]}$$



Amplitude $\leftrightarrow$ Geschwindigkeit

(vi) Separationsansatz:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho(x,t) - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varrho(x,t) = 0 \quad , \quad \text{Randbed.: } \varrho(0,t)=\varrho(L,t)=0$$

Diffusionsgleichung $\qquad \varrho(x,t=0)=\varrho_0(x)$

Ansatz: $\varrho(x,t) = X(x)\,T(t)$

$$\Rightarrow X(x)\,\dot{T}(t) = D\,T(t)\,X''(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{D}\frac{\dot{T}(t)}{T(t)}}_{\text{nur } t} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{nur } x} =: -k^2$$

$$\Rightarrow \dot{T} + k^2 D\,T = 0 \qquad \Rightarrow T(t) = T_0 e^{-k^2 D t}$$

$$X'' + k^2 X = 0 \qquad \Rightarrow X(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$$

$X(0)=0 \Rightarrow B=0$

$X(L)=0 \Rightarrow A=0$ oder $\sin(kL)=0$

$$\Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\Rightarrow \varrho(x,t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x)}\ \underbrace{e^{-k_n^2 D t}}$$

überlagern von sin, die schneller zerfließen je größer k_n ist

mit Anfangsverteilung:

$$\varrho_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x)$$

$$\Rightarrow \int_0^L dx\, \varrho_0(x)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)}_{=\frac{L}{2}\delta_{nm}}$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varrho_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \qquad \text{(Fourier-Reihe)}$$

$\varrho(x,0)=\varrho_0(x)$ bestimmt Gewichte A_n

7.6 Systeme von DGLs

Idee: Umschreiben von DGL n-ter Ordnung auf System von n DGLs 1. Ordnung:

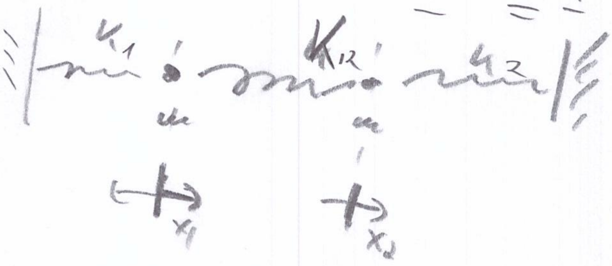
$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$$\hookrightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 := y \\ y_2 := y' \\ \vdots \\ y_k := y^{(k-1)} \quad (k = 2, \dots, n) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{array}\right\} \text{alles 1. Ordnung}$$

Bsp.: $\ddot{x} = \frac{1}{m} F(x)$

$$\hookrightarrow \left.\begin{array}{ll} x_1 = x & \text{O.t.} \\ x_2 = \dot{x} & \text{Geschwindigkeit} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m} F(x_1) \end{array}$$

Falls rechte Seite linear: $\underline{y}' = \underline{\underline{A}}\, \underline{y}$ mit $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$

Bsp.: 

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} m\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_{12}(x_2 - x_1) \end{array}\right\} \quad m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 - k_{12} & k_{12} \\ k_{12} & -k_2 - k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$m\ddot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}$$

Lösen mit Ansatz: $\underline{x}(t) = e^{\lambda t} \underline{u}$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{x}}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \underline{u} \Rightarrow \text{Eigenwertgleichung in } \lambda^2$$

$k_1 = k_2 = k$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_1 = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$ [illegible] $\lambda_2 = \pm i \sqrt{\frac{2k_{12} + k}{m}}$ [illegible] $i\omega$, Eigenfrequenz

Nachtrag / Recap: Lin. Alg.:

Def.: Das komplexe Skalarprodukt zwischen $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{C}^n$ ist definiert

als: $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i = (\underline{a}^*)^T \underline{b}$

QM-Schreibweise

- positiv definit: $\underbrace{\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle}_{} \geq 0$

$$(\underline{a}^*)^T \underline{a} = Re(a_1)^2 + Im(a_1)^2 + \ldots + Re(a_n)^2 + Im(a_n)^2$$

$$\Rightarrow \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{a} = \underline{0}$$

- bilinear: $\langle \underline{a} + \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle + \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle$

$$\langle \underline{a}, \lambda \underline{b} \rangle = \lambda \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$$

$$\langle \lambda \underline{a}, \underline{b} \rangle = \lambda^* \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$$

- $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \overline{\langle \underline{b}, \underline{a} \rangle}$ (hermitesch)

Begriffe:

(a) Transponierte: $(\underline{\underline{A}}^T)_{ij} = (\underline{\underline{A}})_{ji}$

(b) Adjungierte / hermitesch transponierte: $\underline{\underline{A}}^+ = (\underline{\underline{A}}^T)^*$, $(\underline{\underline{A}}^+)_{ij} = a_{ji}^*$

$$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^+ = \underline{\underline{B}}^+ \underline{\underline{A}}^+$$

(c) symmetrisch $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$

(d) orthogonal: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \mathbb{1}$

$\Rightarrow$ Zeilen- & Spaltenvektoren bilden Orthonormalsystem

$$(\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}})_{ij} = \delta_{ij} = \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j$$

(e) unitär: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$: $\underline{\underline{A}}^+ = \underline{\underline{A}}^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^+ \underline{\underline{A}} = \mathbb{1}$, $(\underline{\underline{A}}^+ \underline{\underline{A}})_{ij} = \delta_{ij} = \langle \underline{a}_i, \underline{a}_j \rangle$

(f) hermitesch / selbstadjungiert: $\underline{\underline{A}}^+ = \underline{\underline{A}}$

(etwa Operatoren d. Observablen in QM)

(g) Sei $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine | hermitesche / reell symmetrische Matrix.

Dann gilt:

(a) $\underline{\underline{A}}$ hat n reelle Eigenwerte

(b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

(c) $\underline{\underline{A}}$ ist | unitär / orthogonal diagonalisierbar, d.h. es existiert eine | unitäre / orthogonale Matrix $\underline{\underline{S}}$ mit | $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}^{*} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{S}}$ / $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{S}}$