Tabelle von Elementarfunktionen

- $x^n = \underbrace{x \cdot ... \cdot x}_{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \;\; x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \;\; x^0 = 1.$
- $e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{C}$
- $\ln x$, $x \in (0, +\infty)$, ist die inverse Funktion von exp auf $(-\infty, +\infty)$
- $a^x = e^{x \ln a}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{C}$
- $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{C}$
- $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{C}$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\arcsin x$, $x \in [-1, 1]$, ist die inverse Funktion von sin auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $\arccos x$, $x \in [-1, 1]$, ist die inverse Funktion von cos auf $[0, \pi]$
- $\arctan x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, ist die inverse Funktion von tan auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{C}$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{C}$
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
- $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$
- $\operatorname{arsinh} x = \sinh^{-1} x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, ist die inverse Funktion von sinh auf $(-\infty, +\infty)$
- $\operatorname{arcosh} x = \cosh^{-1} x$, $x \in [1, +\infty)$, ist die inverse Funktion von cosh auf $[0, +\infty)$
- $\operatorname{artanh} x = \tanh^{-1} x$, $x \in (-1, 1)$, ist die inverse Funktion von tanh auf $(-\infty, +\infty)$

Tabelle von Ableitungsfunktionen

- $(\mathrm{const})' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,\ n \in \mathbb{Z}\ )$
- $(x^a)' = ax^{a-1} \quad (x > 0, \quad a \in \mathbb{R})$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = (\ln a)\, a^x \quad (a > 0)$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- $(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$
- $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1)$
- $(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

Rechenregeln für Ableitungen

- Summenregel: $(f+g)' = f' + g'$
- Produktregel: $(fg)' = f'g + fg', \quad (cf)' = cf'$
- Quotientenregel: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
- Kettenregel: $f\,(g\,(x))' = f'\,(g\,(x))\, g'\,(x)$
- Logarithmische Ableitung: $(\ln f\,(x))' = \dfrac{f'\,(x)}{f\,(x)}$
- Ableitung der inversen Funktion: $(f^{-1})'\,(y) = \dfrac{1}{f'\,(x)}$ wobei $x = f^{-1}\,(y)\,.$

Taylor-Formeln

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$
- $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + ... + \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$

Tabelle von Stammfunktionen

- $\displaystyle\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad (a \neq -1)$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ auf $(0, +\infty)$ und $(-\infty, 0)$
- $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$
- $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1)$
- $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ auf $(-1, 1)$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$ auf $(-\infty, \infty)$
- $\displaystyle\int \sinh x = \cosh x + C$
- $\displaystyle\int \cosh x dx = \sinh x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$ auf $(0, +\infty)$ und $(-\infty, 0)$

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$ auf $(1,+\infty)$ und $(-\infty,-1)$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$ auf $(-\infty,-1)\,,(-1,1)\,,(1,+\infty)$
- $\displaystyle\int \ln x dx = x\ln x - x + C \quad \text{auf} \quad (0,+\infty)$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$
- $\displaystyle\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}+C$ auf $(-1,1)$
- $\displaystyle\int \arctan x dx = x\arctan x - \tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$
- $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\tfrac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C.$
- $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\tfrac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$ auf $(1,+\infty)$ und $(-\infty,-1)$
- $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\tfrac{1}{2}\arcsin x + C \quad \text{auf} \quad (-1,1)$