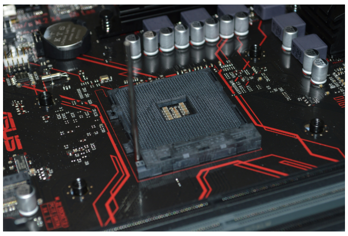
Modellierung eines Abkühlvorgangs

- Diese Aufgabe zum Thema **Differentialgleichungen** dient als Brücke zwischen den Inhalten der HMI 3 und ihren Anwendungen in Systems Engineering.
- Warum sollte mich das interessieren? Differentialgleichungen sind als Werkzeug zur Modellierung technischer Prozesse besonders geeignet.
- Bezüge zu den Lehrveranstaltungen *technische Physik*, *Modellierung und Simulation*, *Systemtheorie und Regelungstechnik 1*, ...
- Welches Wissen wird aus HMI 3 vorausgesetzt? **Exponentialansatz** zum Lösen linearer skalarer (gewöhnlicher) Differentialgleichungen erster Ordnung



Aufgabe

Beim Auskühlen eines glühenden Stahlblechs, bei der Wärmeableitung aus elektronischen Schaltungen oder in Wärmepumpen —aber auch bei der Cola im Kühlschrank oder der Pizza aus dem Ofen— passt sich die Temperatur des Gegenstands an die Umgebungstemperatur an. Diesen zeitlich veränderlichen Prozess beschreibt im einfachsten Fall die Differentialgleichung

$$\dot{T}(t) = a(T(t) - T_*) \tag{1}$$

für die Temperatur $T(t)$, wobei die konstanten Parameter a und T_* den Wärmeaustauschkoeffizienten und die Umgebungstemperatur bezeichnen. Für die relative Temperatur $y(t) = T(t) - T_*$ ergibt sich eine lineare Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = ay(t). \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2).

b) Recherchieren Sie interessante Materialparameter (z.B. den Wärmeaustauschkoeffizienten von Stahl in Luft) und stellen Sie den Temperaturverlauf für zugehörige Lösungen grafisch dar. Gehen Sie hierfür von einem festen Anfangswert $y(0)$ aus.

c) Stellen Sie die Temperaturverläufe für festes a und verschiedene Anfangswerte $y(0)$ grafisch dar.

d) Welches Vorzeichen muss die Anfangsbedingung $y(0)$ haben, um einen Abkühlvorgang zu beschreiben?

Hintergrund

Es handelt sich bei (1) um eine skalare Differentialgleichung erster Ordnung für die Veränderung $\dot{T}(t)$ des Temperaturverlaufs $T(t)$ über die Zeit t. Der Ausgleich der Temperatur $T(t) \in \mathbb{R}_0^+$ eines Materials mit der konstanten Umgebungstemperatur $T_* \in \mathbb{R}_0^+$ ist abhängig vom materialspezifischen Wärmeaustauschkoeffizienten $a \in \mathbb{R}^-$.

Wir gehen davon aus, dass der Parameter a bekannt ist. Die Unbekannte y ist eine Funktion der Zeit, die auch als Zustand bezeichnet wird. Die Differentialgleichung (2) gibt an, wie die Temperaturänderung und der Temperaturverlauf in Beziehung zu einander stehen. Diese Beziehung gilt qualitativ für beliebige Parameter a. Soll das Verhalten eines bestimmten Materials modelliert werden, wählt man den Parameter a entsprechend und erhält so eine quantitative Beziehung.

Erst die Lösung $y : t \mapsto y(t)$ der Differentialgleichung liefert die strukturelle Form des relativen Temperaturverlaufs als Funktion der Zeit, jedoch in Abhängigkeit von einem allgemeinen Anfangswert $y(0)$ und dem Parameter a. Wählt man einen konkreten Anfangswert $y(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ und setzt einen Parameterwert a ein, erhält man die tatsächliche Temperaturkurve für den modellierten Prozess. Mit $T(t) = y(t) + T_*$ erhält man schließlich die absolute Temperatur $T(t)$ aus dem berechneten Verlauf von $y(t)$ und der Umgebungstemperatur T_*.