



Theoretische Physik Ia

Rechenmethoden der Mechanik – Tutorium 10

Aufgabe 28b) und c)

Mathematisches über den Jahreswechsel?

Spickzettel zu den Kapiteln 3 und 4

a) Berechnet für das Skalarfeld $\Phi(\mathbf{x}) = 3x^2 - yz$, und das Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3xyz^2 \\ 2xy^3 \\ -x^2yz \end{pmatrix}$

i) $\nabla\Phi$,

iii) $\nabla \times \mathbf{A}$,

ii) $\nabla \cdot \mathbf{A}$,

iv) $\nabla \times (\Phi\mathbf{A})$.

(5 Punkte)

b) Beweist die Beziehung

$$\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \times \mathbf{A} + \Phi(\nabla \times \mathbf{A})$$

für beliebige Skalar- und Vektorfelder Φ bzw. \mathbf{A} .

(3 Punkte)

c) Beweist, dass für zwei beliebige Vektorfelder \mathbf{A} und \mathbf{B} folgender Zusammenhang gilt

(4 Punkte)

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

Hinweis: Für die Beweise in b) und c) könnt ihr zum Beispiel das Levi-Civita-Symbol nutzen.

b) Beweist die Beziehung

$$\nabla \times (\Phi \mathbf{A}) = (\nabla \Phi) \times \mathbf{A} + \Phi (\nabla \times \mathbf{A})$$

für beliebige Skalar- und Vektorfelder Φ bzw. \mathbf{A} .

**Wenn man keinen Ansatz findet,
hilft ein Blick auf den Spickzettel (Definitionen...)**

$$\left(\nabla \times (\phi \mathbf{A}) \right)_i = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \partial_j (\phi A_k)$$

b) Beweist die Beziehung

$$\nabla \times (\Phi \mathbf{A}) = (\nabla \Phi) \times \mathbf{A} + \Phi (\nabla \times \mathbf{A})$$

für beliebige Skalar- und Vektorfelder Φ bzw. \mathbf{A} .

$$\begin{aligned} \left(\nabla \times (\Phi \mathbf{A}) \right)_i &= \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \partial_j (\Phi A_k) \\ &= \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} (\partial_j \Phi) A_k + \Phi \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \\ &= \left((\nabla \Phi) \times \mathbf{A} \right)_i + \Phi \left(\nabla \times \mathbf{A} \right)_i \end{aligned}$$

c) Beweist, dass für zwei beliebige Vektorfelder \mathbf{A} und \mathbf{B} folgender Zusammenhang gilt
(4 Punkte)

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{A} \times \underline{B}) &= \nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) \\ &= \nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) + \nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) \end{aligned}$$

„nabla auf \underline{A} +
nabla auf \underline{B} anwenden“

c) Beweist, dass für zwei beliebige Vektorfelder \mathbf{A} und \mathbf{B} folgender Zusammenhang gilt
(4 Punkte)

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &= \nabla \cdot (\overset{\downarrow}{\mathbf{A}} \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{B}}) && \text{„rebla auf } \mathbf{A} \text{ +} \\ & && \text{rebla auf } \mathbf{B} \text{ anwenden“} \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \partial_i \varepsilon_{ijk} \overset{\downarrow}{A}_j B_k + \sum_i \sum_j \sum_k \partial_i \varepsilon_{ijk} A_j \overset{\downarrow}{B}_k \\ &= B_k \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j + A_j \varepsilon_{ijk} \partial_i B_k && \text{mit Summenkonvention} \\ &= B_k \varepsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j \varepsilon_{jik} \partial_i B_k \\ &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

Wer hat (et)was Mathematisches über den Jahreswechsel gemacht?



Designed by Freepik

Spickzettel/Gedächtnisstütze

- Sinn und Zweck?
- Positive Nebeneffekte?
- Inhalt:
 - Formales: Definitionen, Sätze...
 - Beispiele: Musterlösungen, Ansätze...

In der Klausur: 1 Blatt A4 handschriftlich

1. Spickzettelentwurf aus Kapiteln 1 & 2 durchsehen

2. Wesentliches aus Kapiteln 3 & 4 aufschreiben

Spickzettel/Gedächtnisstütze: mein Beispiel aus WS23/24

Ableitung \leftarrow **Integral** \rightarrow beides lineare Abb.: $L(Af+Bf) = L(Af) + L(Bf)$

Produktregel: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ $\rightarrow \int f'g dx = fg - \int fg' dx$ (Part. Int.)

Kettenregel: $(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$ $\rightarrow \int f(u) \cdot \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du$ (Subst.)

Quotientenregel: $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Umkehrfkt.: $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Wichtige Abl.: $\arcsin' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arccos' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arctan' = \frac{1}{1+x^2}$

Satz von Taylor: $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x)$

Wichtige Abl. (Zusatz): $\ln' = \frac{1}{x}$, $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$

Integration: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, $\int e^x dx = e^x + C$, $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$

Statische Punkte: $\frac{df}{dx} = 0$ \rightarrow $\frac{d^2f}{dx^2} > 0$ (Minimum), $\frac{d^2f}{dx^2} < 0$ (Maximum)

Polarkoordinaten: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \arctan(\frac{y}{x})$

Jacobi-Determinante: $J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

Kreuzprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$

Spezialprodukt: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Oberflächenintegral: $\int_S \vec{f} \cdot d\vec{A} = \int_D \vec{f}(\vec{r}(u,v)) \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v du dv$

Vektorielles Oberflächenintegral: $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_D \vec{v}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$

Satz von Gauss: $\int_V \text{div } \vec{v} dV = \int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} dA$

Satz von Stokes: $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} dA$

DGL-Systeme: Ansatz $\vec{y}(x) = e^{\lambda x} \vec{u}$, EW: $A \vec{u} = \lambda \vec{u}$

Vektorraum: Abgeschlossen: $v, w \in V \Rightarrow v+w \in V$, $\alpha v \in V$

Linearkombination: $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ von $v_1, \dots, v_n \in V$

Aufspann/lineare Hülle/Erzeugnis: $\text{span}(S) = \langle S \rangle$

Erzeugendensystem: $\text{span}(S) = V$ mit $S \subseteq V$

Basen: $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ist Basis von V , wenn alle $v \in V$ auf genau eine Weise als Linearkombi. von B entstehen

Matrix: $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ \rightarrow n Zeilen, m Spalten

Rotationsmatrix: $R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$

Matrixrechnung: $(A+B)_i = a_i + b_i$, $(\alpha A)_i = \alpha a_i$

Addition: $A+B = C$, $A+B = B+A$

Multiplikation: $C = AB$ (nur für $\text{Spalten}(A) = \text{Zeilen}(B)$)

Spur: $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Einheitsmatrix: $1_n \cdot A = A = A \cdot 1_n$

Transponiert: $(AB)^T = B^T A^T$

Inverse: $A \cdot x = b \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b \Leftrightarrow x = A^{-1} \cdot b$

Eigenwertproblem: $Ax = \lambda x$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in V$

Eigenraum: $\text{Eig}_\lambda(A) = \{v \in V \mid Av = \lambda v\}$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda I) = 0$

Orthogonale Matrix: $S^{-1} = S^T = (s_{ij})$, $s_{ij} = \langle s_i, s_j \rangle$

Raumkurve: $\alpha(t)$, wenn $\alpha'(t) \neq 0 \forall t$ exist. regulär

Boogenlänge: $L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$

Weg-/Flächenintegral: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$

Stumpfwinkel: $\alpha = \arccos(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|})$

Wegintegral über konservatives Vektorfeld: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \Phi(b) - \Phi(a)$

Konservatives Vektorfeld: wenn $\text{rot } \vec{v} = 0$ \Rightarrow $\vec{v} = \text{grad } \Phi$

Rotation (Wirbelstärke): $\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$

Divergenz (Quellstärke): $\text{div } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3$

Laplace-Operatoren: $\Delta = \text{div grad}$

Kreuzprodukt

- $|\underline{u} \times \underline{v}| = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \sin \alpha$
- geom. Interpret.: Fläche
- $\underline{u} \times \underline{v} \perp \underline{u} \wedge \underline{v}$
- $\underline{u} \times \underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{u} \parallel \underline{v}$
- Levi-Civita-Symbol: $(\underline{u} \times \underline{v})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} u_j v_k$
- "bac-cab": $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c} \cdot (\underline{a} \cdot \underline{b})$
- $\underline{u} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{u}$
- bilinear
- $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d})(\underline{b} \cdot \underline{c})$
- $|\underline{a} \times \underline{b}|^2 = \underline{a}^2 \cdot \underline{b}^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2$

Skalarprodukt: Längen von orthog. Projektion

- $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = |\underline{u}|$
- normiert: $\hat{\underline{u}} = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$, sodass $|\hat{\underline{u}}| = 1$
- geometrische Interpretation: $\underline{c} = \underline{b} - \underline{a}$
- $\Rightarrow |\underline{c}|^2 = \underline{c} \cdot \underline{c} = |\underline{b}|^2 + |\underline{a}|^2 - 2\underline{a} \cdot \underline{b}$
- Winkelsatz $\Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos(\varphi) = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \varphi$
- $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} \perp \underline{b}$ (linear in beiden Arg. symm. $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$ pos. definit $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \geq 0$)
- bilinear

Spatprodukt: $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$

- geom. Bedeutung: Volumen Parallelepipeda
- $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a})$
- $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Oberflächenintegrale: $(u,v) \mapsto \underline{x} = \underline{\Phi}(u,v)$

$A = \int_F dA = \int_B \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| du dv$

Oberflächenintegral einer skalaren Fkt. $f(\underline{x})$.

$\int_F f(\underline{x}) dA = \int_B f(\underline{x}(u,v)) \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| du dv$

Vektorielles Oberflächenintegral

$\int_F \underline{v}(\underline{x}) \cdot d\underline{A} = \int_B \underline{v}(\underline{x}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right) du dv$

Satz von Gauß: $\int_{\partial V} \underline{v} \cdot d\underline{A} = \int_V \text{div } \underline{v} dV$

Satz von Stokes: $\oint_{\partial A} \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_A (\text{rot } \underline{v}) \cdot d\underline{A}$

stene

$\underline{x} = e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}}$

$\underline{k} = \sum_{i=1}^n c_i e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}}$

$D = (\partial_x^2 f) \cdot (\partial_y^2 f) - (\partial_x \partial_y f)^2 > 0$

Maximum Minimum

$D < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

Zylinderkoordinaten:

$\underline{x} = r \cos(\varphi)$
 $\underline{y} = r \sin(\varphi)$
 $\underline{z} = z$

$dV = r dr d\varphi dz$

Polarkoordinaten:

in \mathbb{R}^2 : $\underline{x} = r \cos \varphi$
 $\underline{y} = r \sin \varphi$
 $r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi)$

in \mathbb{R}^3 : $\underline{x} = r \sin \theta \cos \varphi$
 $\underline{y} = r \sin \theta \sin \varphi$
 $\underline{z} = r \cos \theta$
 $r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi]$

$dA = r dr d\varphi$ $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

Kreuzprodukt

$\underline{u} \times \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \sin \alpha$

Raumkurve: $\underline{x}(t)$, wenn $\dot{\underline{x}}(t) \neq 0 \forall t \in I$ exist., regulär"

Bogenlänge: $L(c) = \int_a^b |\dot{\underline{x}}(t)| dt$

Weg-/Kurvenintegral: $\int_a^b f(\underline{x}) ds = \int_a^b f(\underline{x}(t)) |\dot{\underline{x}}(t)| dt$

Schwerpunkt: $\underline{x}_S = \frac{1}{M} \int \underline{x} dm$

vektorielle Weg-/Kurvenintegral über Vektorfeld $\underline{v}(\underline{x})$:

$\int_c \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_a^b \underline{v}(\underline{x}(t)) \cdot \dot{\underline{x}}(t) dt$

konervatives Vektorfeld: wenn $\underline{v}(\underline{x}) = \nabla \Phi \Rightarrow$ alle drin

wenn $\text{rot } \underline{v} = 0 \Rightarrow$ Gradientenfeldes sind wirbelfrei

Wirkelfelder sind quellenfrei: $(\underline{v} = \text{rot } \underline{A})$

Gaußintegral $\int_{\partial V} \underline{v} \cdot d\underline{A} = \int_V \text{div } \underline{v} dV$

Wegintegral über konservatives Vektorfeld

$\int_c \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_c \underbrace{(\nabla \Phi)}_{d\Phi} \cdot d\underline{s} = \Phi(\underline{b}) - \Phi(\underline{a})$

\Rightarrow hängt nicht vom Weg ab

Rotation (Wirbelstärke): $\text{rot } \underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \epsilon_{ijk} \partial_j v_k$

Divergenz (Quellenstärke): $\text{div } \underline{v} = \nabla \cdot \underline{v} = \partial_i v_i$

Laplace-Operator: $\Delta = \text{div grad}$

$\text{div}(\underline{v}) = \text{div}(\nabla \Phi) = \Delta \Phi$

$\nabla \cdot (\underline{v}) = \text{div}(\nabla \times \underline{A}) = 0$

Gaußintegral $\int_{\partial V} \underline{v} \cdot d\underline{A} = \int_V \text{div } \underline{v} dV$

Raumkurve: $\underline{x}(t)$, wenn $\dot{\underline{x}}(t) \neq 0 \forall t \in I$: \underline{x} ist "regulär"

Bogenlänge: $L(c) = \int_a^b |\dot{\underline{x}}(t)| dt$

Weg-/Kurveintegral (skalar): $\int_c f(x) ds = \int_a^b f(\underline{x}(t)) |\dot{\underline{x}}(t)| dt$

Schwerpunkt: $x_s = \frac{1}{m} \int_c x dm$

vektorielle Weg-/Kurveintegral über Vektorfeld $\underline{v}(x)$:

$$\int_c \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_a^b \underline{v}(\underline{x}(t)) \cdot \dot{\underline{x}}(t) dt$$

Konservatives Vektorfeld: wenn $\underline{v}(x) = \nabla \phi \rightarrow$
 wenn $\text{rot } \underline{v} = 0 \Rightarrow$ Gradientenfelder sind wirbelfrei
 Wirbelfelder sind quellenfrei: ($\underline{v} = \text{rot } \underline{A}$)

Gaußintegral $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$

Basis aus EV: $B L B^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Diagonalisieren: $D = S^{-1} A S$

b_1, \dots, b_n : EV von A : $S = (b_1, \dots, b_n)$

Wegintegral über konservatives Vektorfeld

$$\int_c \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_c \underbrace{(\nabla \phi)}_{d\phi} \cdot d\underline{s} = \phi(b) - \phi(a)$$

\Rightarrow hängt nicht vom Weg ab

Rotation (Wirbeldichte): $\text{rot } \underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \epsilon_{ijk} \partial_j v_k$

Divergenz (Quelldichte): $\text{div } \underline{v} = \nabla \cdot \underline{v} = \partial_i v_i$

Laplace-Operator: $\Delta = \text{div grad}$

$\phi = \int v_x dx = \text{Weg}$
 $+ \phi(y, z)$
 ϕ alle drin
 $\text{div}(\phi v) = \phi \text{div}(v) + \text{grad}(\phi) \cdot v$
 $\nabla \cdot (\phi v) = \phi(\nabla \cdot v) + \text{grad}(\phi) \cdot v$



Bis 9.1.