Theoretische Physik Ia

Rechenmethoden der Mechanik – Tutorium 10

Aufgabe 28b) und c)

Mathematisches über den Jahreswechsel?

Spickzettel zu den Kapiteln 3 und 4

Aufgabe 28 *Differenzialoperatoren der Vektoranalysis* *(12 Punkte)*

a) Berechnet für das Skalarfeld $\Phi(\boldsymbol{x}) = 3x^2 - yz$, und das Vektorfeld $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 3xyz^2 \\ 2xy^3 \\ -x^2yz \end{pmatrix}$

i) $\nabla\Phi$,

ii) $\nabla \cdot \mathbf{A}$,

iii) $\nabla \times \mathbf{A}$,

iv) $\nabla \times (\Phi\mathbf{A})$.

(5 Punkte)

b) Beweist die Beziehung

$$\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \times \mathbf{A} + \Phi(\nabla \times \mathbf{A})$$

für beliebige Skalar- und Vektorfelder Φ bzw. $\mathbf{A}$. *(3 Punkte)*

c) Beweist, dass für zwei beliebige Vektorfelder $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ folgender Zusammenhang gilt *(4 Punkte)*

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{B}\,.$$

Hinweis: Für die Beweise in b) und c) könnt ihr zum Beispiel das Levi-Civita-Symbol nutzen.

b) Beweist die Beziehung

$$\nabla \times (\Phi \mathbf{A}) = (\nabla \Phi) \times \mathbf{A} + \Phi(\nabla \times \mathbf{A})$$

für beliebige Skalar- und Vektorfelder Φ bzw. $\mathbf{A}$.

Wenn man keinen Ansatz findet,
hilft ein Blick auf den Spickzettel (Definitionen...)

$$\left(\nabla \times (\phi A)\right)_i = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk}\, \partial_j (\phi A_k)$$

b) Beweist die Beziehung

$$\nabla \times (\Phi \mathbf{A}) = (\nabla \Phi) \times \mathbf{A} + \Phi(\nabla \times \mathbf{A})$$

für beliebige Skalar- und Vektorfelder Φ bzw. $\mathbf{A}$.

$$\left(\nabla \times (\phi \underline{A})\right)_i = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \partial_j (\phi A_k)$$

$$= \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} (\partial_j \phi) A_k + \phi \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

$$= \left((\nabla \phi) \times \underline{A}\right)_i + \phi (\nabla \times \underline{A})_i$$

c) Beweist, dass für zwei beliebige Vektorfelder $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ folgender Zusammenhang gilt *(4 Punkte)*

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \,.$$

$$\operatorname{div}(\underline{A} \times \underline{B}) = \nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{B})$$

$$= \underline{\nabla} \cdot (\overset{\downarrow}{\underline{A}} \times \underline{B}) + \underline{\nabla} \cdot (\underline{A} \times \overset{\downarrow}{\underline{B}})$$

„nabla auf A + nabla auf B anwenden"

c) Beweist, dass für zwei beliebige Vektorfelder **A** und **B** folgender Zusammenhang gilt *(4 Punkte)*

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}\,.$$

$$\operatorname{div}(\underline{A}\times\underline{B}) = \nabla\cdot(\underline{A}\times\underline{B})$$

$$= \underline{\nabla}\cdot(\overset{\downarrow}{\underline{A}}\times\underline{B}) + \underline{\nabla}\cdot(\underline{A}\times\overset{\downarrow}{\underline{B}})$$

„nabla auf A + nabla auf B anwenden"

$$= \sum_i\sum_j\sum_k \partial_i\,\varepsilon_{ijk}\,\overset{\downarrow}{A}_j B_k + \sum_i\sum_j\sum_k \partial_i\,\varepsilon_{ijk}\,A_j\overset{\downarrow}{B}_k$$

$$= B_k\,\varepsilon_{ijk}\,\partial_i A_j + A_j\,\varepsilon_{ijk}\,\partial_i B_k$$

mit Summenkonvention

$$= B_k\,\varepsilon_{kij}\,\partial_i A_j - A_j\,\varepsilon_{jik}\,\partial_i B_k$$

$$= \underline{B}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{A}) - \underline{A}\,(\underline{\nabla}\times\underline{B})$$

Wer hat (et)was Mathematisches über den Jahreswechsel gemacht?

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Designed by Freepik

Spickzettel/Gedächtnisstütze

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

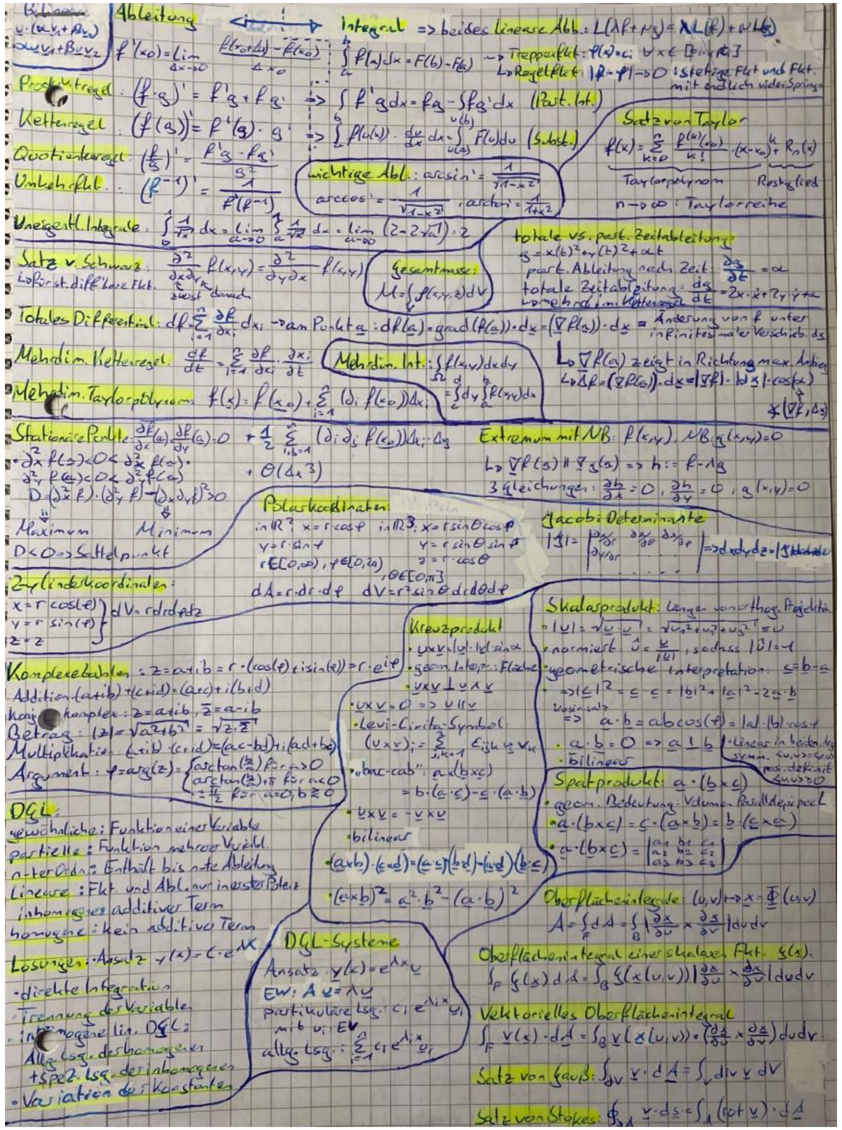
- Sinn und Zweck?
- Positive Nebeneffekte?

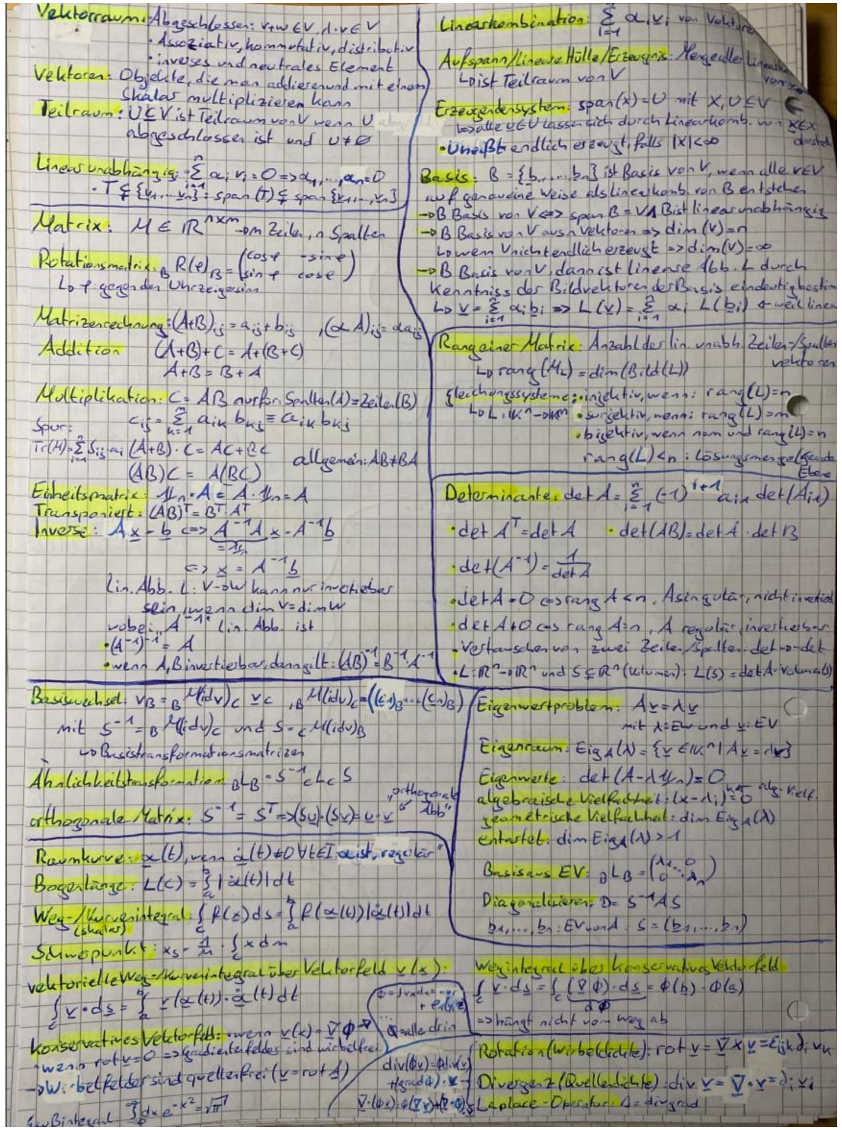
- Inhalt:
  - Formales: Definitionen, Sätze…
  - Beispiele: Musterlösungen, Ansätze…

In der Klausur: 1 Blatt A4 handschriftlich

1. **Spickzettelentwurf aus Kapiteln 1 & 2 durchsehen**
2. **Wesentliches aus Kapiteln 3 & 4 aufschreiben**

Spickzettel/Gedächtnisstütze: mein Beispiel aus WS23/24





Kreuzprodukt

- $u \times v = |u| \cdot |v| \cdot \sin\alpha$
- geom. Interpr.: Fläche
- $u \times v \perp u \wedge v$
- $u \times v = 0 \Rightarrow u \parallel v$
- Levi-Civita-Symbol: $(u \times v)_i := \sum_{j,k=1} \varepsilon_{ijk} u_j v_k$
- „bac-cab": $a \times (b \times c) = b \cdot (a \cdot c) - c \cdot (a \cdot b)$
- $u \times v = -v \times u$
- bilinear
- $(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$
- $(a \times b)^2 = a^2 \cdot b^2 - (a \cdot b)^2$

$= r \cdot e^{i\varphi}$

...steme

$x(x) = e^{\lambda x} u$

λu

Lsg.: $c_i e^{\lambda_i x} u_i$

$\sum_{i=1} c_i e^{\lambda_i x} u_i$

Skalarprodukt: Länge von orthog. Projektion

- $|u| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \equiv u$
- normiert: $\hat{u} = \frac{u}{|u|}$, sodass $|\hat{u}| = 1$
- geometrische Interpretation: $c = b - a$
- $\Rightarrow |c|^2 = c \cdot c = |b|^2 + |a|^2 - 2a \cdot b$

Kosinussatz $\Rightarrow a \cdot b = ab\cos(\varphi) = |a| \cdot |b| \cdot \cos\varphi$

- $a \cdot b = 0 \Rightarrow a \perp b$
- bilinear

- Linear in beiden Arg.
- symm. $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$
- pos. definit $\langle u,v \rangle \geq 0$

Spatprodukt: $a \cdot (b \times c)$

- geom. Bedeutung: Volumen Parallelepiped
- $a \cdot (b \times c) = c \cdot (a \times b) = b \cdot (c \times a)$
- $a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Oberflächenintegrale: $(u,v) \mapsto x = \Phi(u,v)$

$$A = \int_F dA = \int_B \left| \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} \right| du\, dv$$

Oberflächenintegral einer skalaren Fkt. $g(x)$:

$$\int_F g(x)\, dA = \int_B g(x(u,v)) \left| \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} \right| du\, dv$$

Vektorielles Oberflächenintegral

$$\int_F v(x) \cdot dA = \int_B v(x(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} \right) du\, dv$$

Satz von Gauß: $\int_{\partial V} v \cdot dA = \int_V \operatorname{div} v\, dV$

Satz von Stokes: $\oint_{\partial A} v \cdot ds = \int_A (\operatorname{rot} v) \cdot dA$

$D = (\partial_x^2 f) \cdot (\partial_y^2 f) - (\partial_x \partial_y f)^2 > 0$

$\Downarrow$ Maximum $\qquad \Downarrow$ Minimum

$D < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

Zylinderkoordinaten:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned}\right\} dV = r\, dr\, d\varphi\, dz$$

Polarkoordinaten:

in $\mathbb{R}^2$: $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$, $r \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

in $\mathbb{R}^3$: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r \cdot \cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$

$dA = r \cdot dr \cdot d\varphi \qquad dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

Kreuzprodukt

- $u \times v = |u| \cdot |v| \cdot \sin\alpha$

Raumkurve: $\alpha(t)$, wenn $\dot{\alpha}(t) \neq 0\ \forall t \in I$: α ist „regulär"

Bogenlänge: $L(c) = \int_a^b |\dot{\alpha}(t)|\, dt$

Weg-/Kurvenintegral (skalar): $\int_c f(x)\, ds = \int_a^b f(\alpha(t)) |\dot{\alpha}(t)|\, dt$

Schwerpunkt: $x_S = \frac{1}{M} \cdot \int x\, dm$

vektorielle Weg-/Kurvenintegral über Vektorfeld $v(x)$:

$$\int_c v \cdot ds = \int_a^b v(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)\, dt$$

Konservatives Vektorfeld: wenn $v(x) = \nabla\Phi$

wenn $\operatorname{rot} v = 0 \Rightarrow$ Gradientenfeldes sind wirbelfrei

$\rightarrow$ Wirbelfelder sind quellenfrei ($v = \operatorname{rot} A$)

Gaußintegral $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$

$\Phi = \int v_x dx = \ldots + f(y,z)$

Quelle drin

$\operatorname{div}(\Phi v) = \Phi \operatorname{div}(v) + (\operatorname{grad}\Phi) \cdot v$

$\nabla \cdot (\Phi v) = \Phi(\nabla \cdot v) + (\nabla\Phi) \cdot v$

Basis aus EV: ${}_B L_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Diagonalisieren: $D = S^{-1} A S$

$b_1, \ldots, b_n$: EV und $S = (b_1, \ldots, b_n)$

Wegintegral über konservatives Vektorfeld

$$\int_c v \cdot ds = \int_c \underbrace{(\nabla\Phi) \cdot ds}_{d\Phi} = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$\Rightarrow$ hängt nicht vom Weg ab

Rotation (Wirbeldichte): $\operatorname{rot} v = \nabla \times v = \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k$

Divergenz (Quelldichte): $\operatorname{div} v = \nabla \cdot v = \partial_i v_i$

Laplace-Operator: $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$

Raumkurve: $\underline{\alpha}(t)$, wenn $\dot{\underline{\alpha}}(t) \neq 0 \; \forall t \in I$: α ist „regulär"

Bogenlänge: $L(c) = \int_a^b |\dot{\underline{\alpha}}(t)| \, dt$

Weg-/Kurvenintegral (skalar): $\int_c f(\underline{x}) \, ds = \int_a^b f(\underline{\alpha}(t)) \, |\dot{\underline{\alpha}}(t)| \, dt$

Schwerpunkt: $x_S = \frac{1}{M} \cdot \int_c x \, dm$

vektorielle Weg-/Kurvenintegral über Vektorfeld $\underline{v}(\underline{x})$:

$$\int_c \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_a^b \underline{v}(\underline{\alpha}(t)) \cdot \dot{\underline{\alpha}}(t) \, dt$$

Konservatives Vektorfeld: wenn $\underline{v}(x) = \underline{\nabla}\Phi$

$\Phi = \int v_x \, dx = \dots + c_1(y,z)$

...

Quelle drin

→ wenn rot $\underline{v} = 0$ => Gradientenfeldes sind wirbelfrei

→ Wirbelfelder sind quellenfrei: ($\underline{v} = \text{rot}\,\underline{A}$)

$\text{div}(\Phi \underline{v}) = \Phi \, \text{div}(\underline{v}) + (\text{grad}\,\Phi) \cdot \underline{v}$

$\underline{\nabla} \cdot (\Phi \underline{v}) = \Phi(\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) + (\underline{\nabla}\Phi) \cdot \underline{v}$

Gaußintegral: $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$

Basis aus EV: ${}_B L_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Diagonalisieren: $D = S^{-1} A S$

$\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$: EV und $S = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$

Wegintegral über konservatives Vektorfeld

$$\int_c \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_c \underbrace{(\underline{\nabla}\Phi) \cdot d\underline{s}}_{d\Phi} = \Phi(\underline{b}) - \Phi(\underline{a})$$

=> hängt nicht vom Weg ab

Rotation (Wirbeldichte): $\text{rot}\,\underline{v} = \underline{\nabla} \times \underline{v} = \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k$

Divergenz (Quellendichte): $\text{div}\,\underline{v} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \partial_i v_i$

Laplace-Operator: $\Delta = \text{div}\,\text{grad}$

Bis 9.1.