Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik Ia – Rechenmethoden der Mechanik

Dr. habil. Philipp Hövel, Katharina Scherer, Noora Aho, Joshua Weißenfels, Max Lauer

WiSe 2024/25 **Blatt 12** **Abgabe 05.02.2025**

Aufgabe 42 *Basiswechsel* *(6 Punkte)*

Betrachtet die Standardbasis $\mathcal{A} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ und die Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2\} = \{2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\}$ von $\mathbb{R}^2$.

a) Zeichnet die zwei Basen in einer Ebene. *(1 Punkt)*

b) Bestimmt die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\mathbf{M}_{\mathcal{A}}$ des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ und ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{M}_{\mathcal{B}}$ des Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$. *(4 Punkte)*
Hinweis: Um ${}_{\mathcal{B}}\mathbf{M}_{\mathcal{A}}$ zu erhalten, schreibt euch die Basisvektoren der Standardbasis $\mathcal{A}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ auf.

c) Zeigt, dass gilt ${}_{\mathcal{B}}\mathbf{M}_{\mathcal{A}}\,{}_{\mathcal{A}}\mathbf{M}_{\mathcal{B}} = \mathbb{1}$. *(1 Punkt)*
Hinweis: Dieser Zusammenhang gilt hier, da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ beides Basen des gleichen Vektorraums sind (hier $\mathbb{R}^2$).

Aufgabe 43 *Eigenwerte, Eigenvektoren und Spur* *(10 Punkte)*

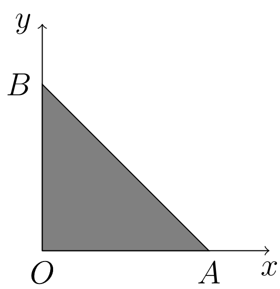
Die Spur (engl. *trace*) einer symmetrischen Matrix $\mathbf{M}$ ist die Summe der Diagonalelemente: $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{M}) = \sum_i m_{ii}$. Betrachtet die Matrix $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) i) Berechnet die Spur von $\mathbf{M}$.
   ii) Berechnet die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{M}$.
   iii) Gebt die Matrix $\mathbf{P}$ an, welche $\mathbf{M}$ diagonalisiert: $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$, wobei $\mathbf{D}$ diagonal ist.
   iv) Berechnet die Spur von $\mathbf{D}$. *(7 Punkte)*

b) Betrachtet den Vektor $\mathbf{x} = (0, -4, -1)$ und die Matrix $\mathbf{M}$. Schreibt $\mathbf{x}$ und $\mathbf{Mx}$ in der Basis aus den Eigenvektoren von $\mathbf{M}$. *(3 Punkte)*

Aufgabe 44 *Trägheitstensor und Hauptachsentransformation* *(10 Punkte)*

Betrachtet einen flachen Festkörper in Dreiecksform mit gleichmäßiger Dichte $\rho = M/S$, wobei M die Masse und $S = a^2/2$ die Fläche des Körpers sind. Das Dreieck ist gleichschenklig und rechtwinklig, und a ist die Länge einer der Seiten mit gleicher Länge. Wir wählen die Ecke des rechten Winkels als Ursprung des Koordinatensystems. Die x- und y-Achse sind entlang der gleichen Seiten des Dreiecks und die z-Achse senkrecht zu der Dreiecksfläche (siehe Abbildung).



Der *Trägheitstensor* ist eine reelle symmetrische 3×3 Matrix, deren Komponenten gegeben sind durch: $I_{lm} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \, [(\mathbf{r}^2)\delta_{lm} - r_l r_m] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$.
Dabei bezeichnet $\mathbf{r} = (x, y, z)$ den Ortsvektor bzgl. der Standardbasis und r_l dessen l-te Komponente, sowie δ_{lm} das Kronecker-Delta. Offenbar ist $\mathbf{I}$ eine symmetrische Matrix, also $I_{lm} = I_{ml}$. Für den Trägheitstensor des Dreieck OAB, wie es der Abbildung gezeigt ist, ergibt sich:
$\mathbf{I} = \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Rechnet das gerne als zusätzliche Übung bzw. Wiederholung zur Klausurvorbereitung nach.

a) Sei $\mathbf{A}$ eine reelle symmetrische Matrix, d.h. es gilt $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Zeigt: Die Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ zu zwei *verschiedenen* Eigenwerten λ_1 und λ_2 sind orthogonal. *(3 Punkte)*

b) Bestimmt die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{I}$, die als *Hauptträgheitsmomente* bzw. *Hauptträgheitsachsen* bezeichnet werden. *(5 Punkte)*

c) Gebt die Basiswechselmatrix von der ursprünglichen Basis zu den Hauptträgheitsachsen an und den Trägheitstensor $\mathbf{I}'$ in der Basis der Hauptträgheitsachsen. *(2 Punkte)*

Aufgabe 45 *Differenzialgleichungen* *(14 Punkte)*

a) Löst folgendes Anfangswertproblem mit Trennung der Veränderlichen: *(2 Punkte)*

$$y' = e^{x-y} \text{ mit } y(0) = 1.$$

b) Löst folgende Differenzialgleichung mittels Variation der Konstanten:

$$\dot{x} + 2x = t,$$

wobei $x(0) = 0$ und t ein konstanter Parameter ist. *(4 Punkte)*

c) Die Sinkgeschwindigkeit $v(t)$ einer Kugel mit Masse m in einer Flüssigkeit mit hoher Viskosität wird durch die Differenzialgleichung

$$m\dot{v}(t) + kv(t) = mg$$

beschrieben, wobei k der Reibungskoeffizient und g die Erdbeschleunigung sind. Der Term kv beschreibt die Stoke'sche Reibung, die bei laminarer (nicht turbulenter) Strömung auftritt. Löst diese Differenzialgleichung zu der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ mit Variation der Konstanten, und skizziert $v(t)$. Welche Endgeschwindigkeit wird erreicht? *(5 Punkte)*

d) Ein langer Stab ist an einem Ende mit einem Nagel auf dem Boden befestigt und rotiert um den Nagel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Auf dem Stab rutscht eine Masse m reibungsfrei radial nach außen, getrieben von der Zentrifugalkraft. Der Abstand der Masse zum Rotationszentrum $r(t)$ ist gegeben durch die Differenzialgleichung:

$$\ddot{r}(t) - \omega^2 r(t) = 0\,.$$

Bestimmt die Lösung der Differenzialgleichung mit den Anfangsbedingungen: $r(0) = 1$ und $\dot{r}(0) = 0$ und skizziert $r(t)$. *(3 Punkte)*