UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Theoretische Physik Ia

Rechenmethoden der Mechanik – Tutorium 13

Eigenwerte der Rotation

Themen/Aufgabenwahl für die letzte Übungen

Differenzialgleichung

Allgemeine Rückmeldung/Hinweis

1. Wenn eine *Skizze* gefragt ist, gibt es auch für eine *Skizze* Punkte.
2. Eine Zahl ist eine Zahl. Ein Vektor ist ein Vektor.
   - Gilt auch für komplexe Zahlen (also Punkte in der komplexen Ebene, ohne Richtung)

Eigenwerte der Rotation um 45 Grad

$$x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha$$
$$y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Eigenwerte der Rotation um 45 Grad

θ	0^0 0^0	30^0 $\frac{\pi}{6}$	45^0 $\frac{\pi}{4}$	60^0 $\frac{\pi}{3}$	90^0 $\frac{\pi}{2}$	180^0 π	270^0 $\frac{3\pi}{2}$	360^0 2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$N.D.$	0	$N.D.$	0
$\operatorname{cosec}\theta$	$N.D.$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$N.D.$	-1	$N.D$
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	$N.D.$	-1	$N.D.$	1
$\cot\theta$	$N.D.$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$N.D.$	0	$N.D$

Eigenwerte der Rotation um 45 Grad

$$\mathbf{R}_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Eigenwerte der Rotation um 45 Grad

Und nun?

Eigenwerte der Rotation um 45 Grad

$$\mathbf{R}_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Und nun?

1. **Charakteristisches Polynom**
2. **Nullstellen finden**

Eigenwerte der Rotation um 45 Grad

$$0 = \chi_{\mathbf{R}_{\pi/4}}(\lambda) = \det\left(\mathbf{R}_{\pi/4} - \lambda\mathbb{1}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$$

Themen/Aufgabenwahl für die letzte Übungen

https://forms.office.com/e/b07ZcdFFf6

Differenzialgleichung

Betrachtet ein mathematisches Pendel mit Länge l, welches sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in der unteren Gleichgewichtsposition $\phi(0) = 0$ befindet und gerade ausreichend kinetische Energie besitzt, um die obere (instabile) Gleichgewichtsposition $\phi = \pi$ mit Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi} = 0$ zu erreichen.
Gebt den Energieerhaltungssatz eines solchen Pendels an und zeigt damit, dass die Bewegungsgleichung des Pendels lautet:

$$\dot{\phi} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Löst diese DGL mit der gegeben Anfangsbedingung. *(4 Punkte)*
Hinweis: Eine Stammfunktion zu $1/\cos(x)$ ist $\ln(\tan[(2x + \pi)/4])$.

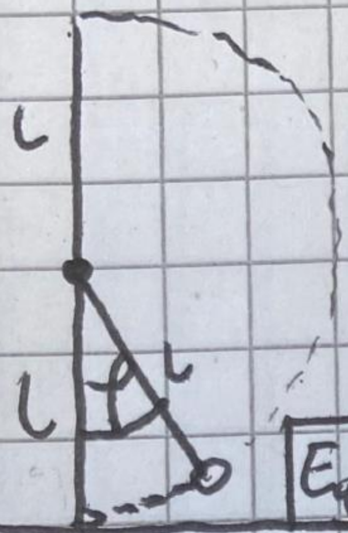
Differenzialgleichung

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

DGL: Länge l $\varphi(t=0)=0$ math. Pendel

INTE

Aufgabe: EES angeben und Bewegungsgl. her



$\boxed{E_g = E_k + E_p}$

EES: oben: $\dot{\varphi}=0 \Rightarrow E_{ges} = E_{pot} = 2\cdot m\cdot g\cdot L$

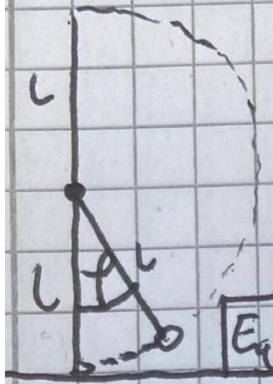
unten: $E_{ges} = E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\varphi}^2$

$\omega = \dot{\varphi} = \frac{v}{r} = \frac{v}{L} \Leftrightarrow v = L\cdot\dot{\varphi}$

Differenzialgleichung

DGL: Länge L $\varphi(t=0)=0$ math. Pendel WTE

Aufgabe: EES angeben und Bewegungsgl. her



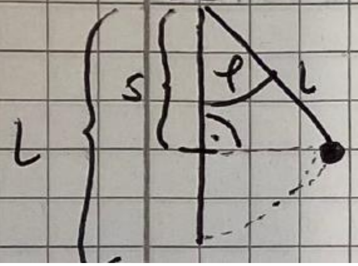
EES: oben: $\dot{\varphi}=0 \Rightarrow E_{ges} = E_{pot} = 2 \cdot m \cdot g \cdot L$

$\boxed{E_g = E_k + E_p}$ unten: $E_{ges} = E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\varphi}^2$

$\omega = \dot{\varphi} = \frac{v}{r} = \frac{v}{L} \Leftrightarrow v = L \cdot \dot{\varphi}$

Energien gleichsetzen (EES): ABER: Auf dem weg hoch existieren sowohl kin. als auch pot. Energie

$$2 \cdot m g L = \boxed{E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\varphi}^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\varphi}^2 + m g L \cdot (1 - \cos\varphi)}$$



$L \cos\varphi$, weil $\cos\varphi = \frac{AK}{H} = \frac{s}{L} \Leftrightarrow s = L\cos\varphi$

$L - L\cos\varphi = L \cdot (1 - \cos\varphi)$

Differenzialgleichung

Nach $\dot\varphi$ auflösen: $\boxed{\dot\varphi = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$

von Wurzel

„in welche Richtung drehen wir"

Herleitung: $2mgL = \frac{1}{2}mL^2\dot\varphi^2 + mgL\cdot(1-\cos\varphi)$ $\quad | :m \quad | -mgL(1-\cos\varphi)$

$\Leftrightarrow 2gL - gL(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}\cdot L^2\dot\varphi^2$

$\Leftrightarrow gL\cdot(1+\cos\varphi) = \frac{1}{2}\cdot L^2\dot\varphi^2$ $\quad | \cdot \frac{2}{L^2}$

$\Leftrightarrow 2\frac{g}{L}\cdot(1+\cos\varphi) = \dot\varphi^2$ $\quad | \; 1+\cos\varphi = 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2\frac{g}{L}\cdot 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \dot\varphi^2$

$\Leftrightarrow 4\frac{g}{L}\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \dot\varphi^2$ $\quad | \sqrt{}$

$\Rightarrow \boxed{\dot\varphi = \pm 2\sqrt{\frac{g}{L}}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$

Differenzialgleichung

DGL lösen

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{L}}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{L}}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad | \cdot dt \quad | : \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} d\varphi = \pm 2\sqrt{\frac{g}{L}}\, dt \quad | \int$$

Anfangs-Bed. $\varphi(0)=0$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi'}{2}\right)} d\varphi' = \pm 2\sqrt{\frac{g}{L}} \int_0^t dt'$$

φ', t' nur Formalie

$$\Leftrightarrow \ln\left(\tan\left((\varphi+\pi)\cdot\frac{1}{4}\right)\right) = \pm 2\sqrt{\frac{g}{L}}\, t \quad | e$$

$$\Leftrightarrow \tan\left((\varphi+\pi)\frac{1}{4}\right) = e^{\pm 2\sqrt{\frac{g}{L}}\cdot t} \quad | \arctan$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4} = \arctan\left(e^{\pm 2\sqrt{\frac{g}{L}}\cdot t}\right) \quad | -\frac{\pi}{4} \quad | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\varphi(t) = 4\arctan\left(e^{\pm 2\sqrt{\frac{g}{L}}\cdot t}\right) - \pi}$$

Hinweis:

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left(\tan\left((2x+\pi)\cdot\frac{1}{4}\right)\right)$$

Bis 30.1.