



Theoretische Physik Ia

Rechenmethoden der Mechanik

Klausuraufgaben zu Kapitel 1

aus Klausur 1 im WS 23/24

Aufgabe 2 *Integrale (9 Punkte)*

Bestimmen Sie folgende Integrale:

a)

$$\int \ln(x^2) \frac{1}{x^2} dx$$

(3 Punkte)

b)

$$\int_0^2 2x \exp(x^2) dx$$

(2 Punkte)

- c) Wir betrachten einen Halbkreisring mit Masse M , Innenradius $r_1 = 1$ und Außenradius $r_2 = 2$, der in der x - y -Ebene so orientiert ist, dass sich der Schwerpunkt auf der y -Achse befindet. Gesucht ist die y -Koordinate des Schwerpunktes, gegeben durch

$$S_y = \frac{1}{M} \int_{\text{Halbkreisring}} y \rho(x, y) dx dy,$$

wobei die Massendichte (Masse pro Fläche) $\rho(x, y) = 1$ konstant ist und die Fläche des Halbkreisrings gegeben ist mit $A = \frac{3}{2}\pi$.

- (i) Skizzieren Sie den Halbkreisring in der x - y -Ebene. *(1 Punkt)*
- (ii) Berechnen Sie S_y und zeichnen Sie ihn in die Skizze. *(3 Punkte)*
- Hinweis:* Führen Sie die Rechnung in Polarkoordinaten aus.

Aufgabe 4 *Mehrdimensionale Taylorentwicklung (12 Punkte)*

- a) Geben Sie die allgemeine mehrdimensionale Taylorentwicklung einer Funktion $f(x, y)$ um den Entwicklungspunkt (x_0, y_0) bis zur 2. Ordnung (also bis zur quadratischen Näherung) an. *(2 Punkte)*
- b) Bestimmen Sie nun konkret die Taylorentwicklung der Funktion $g(x, y) = e^{xy} + \sin(x^2 + y^2)$ um den Entwicklungspunkt $(0, \sqrt{\pi})$ bis zur 2. Ordnung. *(9 Punkte)*
- c) Zeigen Sie, dass sich die Taylorentwicklung von $g(x, y)$ um $(0, \sqrt{\pi})$ zusammenfassen lässt zu: *(1 Punkt)*

$$g(x, y) = 1 + \pi + xy + \frac{\pi - 2}{2}x^2 - y^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3, \Delta y^3)$$