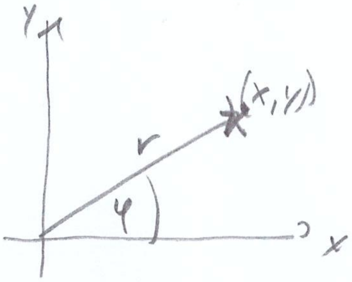
## 2.9 Coordinate transforms

### 2.9.1 Polar coordinates in $\mathbb{R}^2$

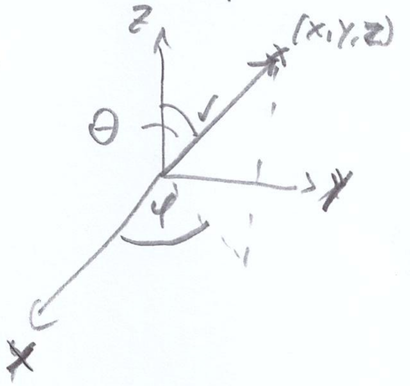



$$x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi$$
$$y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi \quad , \quad r \in [0,\infty),\ \varphi \in [0,2\pi)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ area element: $dA = \det \underline{\underline{J}}\, dr\, d\varphi = r\, dr\, d\varphi$

### 2.9.2 Spherical coordinates

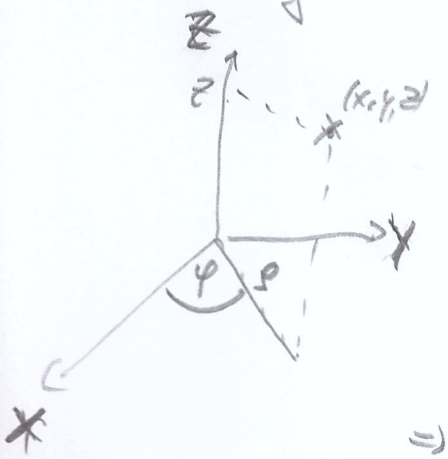



$$x = x(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = y(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\sin\varphi\ , \quad r \in [0,\infty),\ \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi)$$
$$z = z(r,\theta,\varphi) = r\cos\theta$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ volume element: $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

### 2.9.3 Cylindrical coordinates




$$x = x(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi$$
$$y = y(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi$$
$$z = z = z$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad dV = \rho\, d\rho\, dz\, d\varphi$

# 3. Vektoralgebra



## 3.1 Skalare

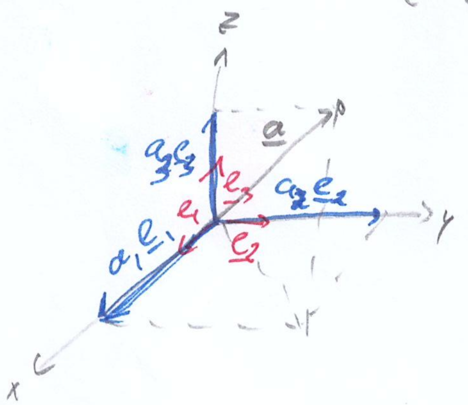
Ein Skalar ist eine Zahl!

Bsp.: · Masse $m$, Temperatur $T$, Energie $E$, ...

## 3.2 Vektoren im kartesischen Raum

Kartesisch nach René Descartes (31.3.1596 – 11.2.1650)

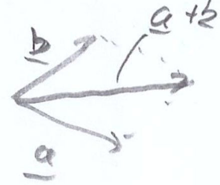
- Vektor $\underline{a}$: Verschiebung im Raum $\mathbb{R}^n$ (meist $n = 3$)
- Länge $|\underline{a}| = a$ und Richtung $\underline{a}\nearrow$ (unabhängig vom Koordinatensystem)
- Kartesische Basis $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$: $\underline{a} = a_x \underline{e}_x + a_y \underline{e}_y + a_z \underline{e}_z$



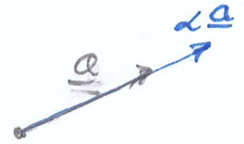

$$\equiv a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3$$

$$\equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad a_i: \text{kartesische Koordinaten}$$

- Vektoraddition




- Vektormultiplikation (skalar)




- Bsp.: Kraft $\underline{F}$, Impuls $\underline{p}$, Geschwindigkeit $\underline{v}$, Ort $\underline{r}$, E-Feld $\underline{E}$...

## 3.3 Skalarprodukt

auch "dot product"

Def.: Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten ist definiert als eine Abbildung

$$(\cdot\,,\cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \quad (\underline{a},\underline{b}) \mapsto \underline{a}\cdot\underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\equiv \langle \underline{a},\underline{b}\rangle$$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Def.: Die **Länge/Norm** eines Vektors ist definiert als

$$a \equiv \|\underline{a}\| \equiv |\underline{a}| := \sqrt{\underline{a}\cdot\underline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}$$

- **normierter Vektor:** $\hat{\underline{a}} = \dfrac{\underline{a}}{|\underline{a}|} \Rightarrow |\hat{\underline{a}}| = \left|\dfrac{\underline{a}}{|\underline{a}|}\right| = \dfrac{|\underline{a}|}{|\underline{a}|} = 1$

- Eigenschaften des Skalarproduktes:

  (i) **bilinear**: linear in jedem Anteil:

  $$\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha\underline{a}, \underline{b}) = \alpha(\underline{a},\underline{b})$$

  $$(\underline{a}, \underline{b}+\underline{c}) = (\underline{a},\underline{b}) + (\underline{a},\underline{c})$$

  (ii) **symmetrisch**: $(\underline{a},\underline{b}) = (\underline{b},\underline{a})$

  (iii) **positiv definit**: $(\underline{a},\underline{a}) \geq 0 \ \wedge\ (\underline{a},\underline{a}) = |\underline{a}|^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{a} = \underline{0}$

$\Rightarrow$ Das Skalarprodukt ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform.

- Geometrische Interpretation:

$$|\underline{c}|^2 = (\underline{b}-\underline{a})\cdot(\underline{b}-\underline{a})$$


$\underline{c} = \underline{b} - \underline{a}$

$$= |\underline{b}|^2 + |\underline{a}|^2 - 2\,\underline{a}\cdot\underline{b}$$

**Kosinussatz**: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$

$$\Rightarrow \quad \underline{a}\cdot\underline{b} = ab\cos\varphi$$

$\Rightarrow$ Für $\underline{a},\underline{b} \neq \underline{0}$ gilt: $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0 \Leftrightarrow \underline{a} \perp \underline{b}$ (also $\varphi = \pm 90° = \pm\frac{\pi}{2}$)