3.1 Scalars

scalars = numbers (plus unit)

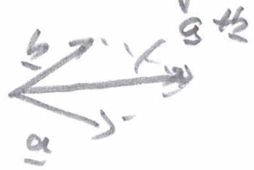
3.2 Vectors in Cartesian spaces

- vector: $\underline{a}$ shift in $\mathbb{R}^n$ (most often forces: $n=3$)
  ↳ length/magnitude $|\underline{a}| = ||\underline{a}|| \equiv a$ and direction
- Cartesian basis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$:

Cartesian coordinates

$$\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i \underline{e}_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

- adding 2 vectors



- multiplying a vector with a scalar

3.3 Dot product (scalar product)

- The dot product of 2 vectors $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ with Cartesian coordinates $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, respectively, is defined as a algebraic operation:

$$(\cdot, \cdot): \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

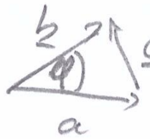
$$(\underline{a}, \underline{b}) \longmapsto \underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- The length/magnitude/norm of a vector is defined as

$$a \equiv ||\underline{a}|| \equiv |\underline{a}| := \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}$$

- normalized vector: $\hat{\underline{a}} = \frac{\underline{a}}{a}$
- properties of the dot product:
  (i) bilinear: $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha \underline{a}, \underline{b}) = \alpha (\underline{a}, \underline{b})$
  $(\underline{a}, \underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a}, \underline{b}) + (\underline{a}, \underline{c})$
  (ii) symmetric: $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$
  (iii) positive definit: $(\underline{a}, \underline{a}) \geq 0 \wedge (\underline{a}, \underline{a}) = a^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{a} = \underline{0}$

- geometric interpretation:



$\underline{c} = \underline{b} - \underline{a}$ $\quad \underline{c}\cdot\underline{c} = |\underline{c}|^2 = c^2 = (\underline{b}-\underline{a})\cdot(\underline{b}-\underline{a})$

$$= b^2 + a^2 - 2\,\underline{a}\cdot\underline{b}$$

Law of cosines: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$

$$\Big\} \quad \underline{a}\cdot\underline{b} = ab\cos\varphi$$

$\Rightarrow$ for $\underline{a},\underline{b} \neq \underline{0}$: $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0 \iff \underline{a} \perp \underline{b}$ $\quad (\varphi = \pm\frac{\pi}{2})$

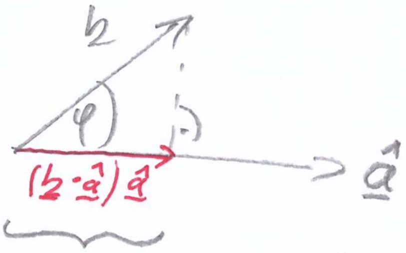
$\Rightarrow$ orthogonality

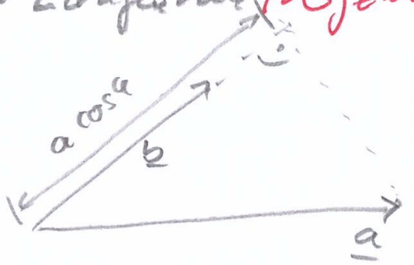
$$\Rightarrow \varphi = \arccos \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{ab} = \arccos \hat{\underline{a}}\cdot\hat{\underline{b}}$$

Das Skalarprodukt definiert Winkel und Orthogonalität (gilt auch für $\mathbb{R}^n$ oder andere Vektorräume, etwa C/stetige Funktionen)

↳ $\varphi = \arccos\left(\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{ab}\right)$

- Skalarprodukte liefern die Längen von Projektionen





Länge der Projektion $\left|(\underline{b}\cdot\hat{\underline{a}})\hat{\underline{a}}\right| = |\underline{b}\cdot\hat{\underline{a}}|\underbrace{|\hat{\underline{a}}|}_{=1} = |\underline{b}|\,|\hat{\underline{a}}|\cos\varphi$

$= |\underline{b}|\cos\varphi$

- Für eine orthonormale Basis (etwa die kartesische Basis $\hat{\underline{e}}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\hat{\underline{e}}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\hat{\underline{e}}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$) gilt:

$$\hat{\underline{e}}_i \cdot \hat{\underline{e}}_j = \delta_{ij} \qquad i = 1, 2, 3$$

$\Rightarrow$ Komponenten von $\underline{a}$: $\underline{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \hat{\underline{e}}_i \Rightarrow a_i = \underline{a}\cdot\hat{\underline{e}}_i$

↳ $\underline{a}\cdot\hat{\underline{e}}_i = \left(\sum_{j=1}^{3} a_j \hat{\underline{e}}_j\right)\cdot\hat{\underline{e}}_i = \sum_{j=1}^{3} a_j \underbrace{\hat{\underline{e}}_j\cdot\hat{\underline{e}}_i}_{\delta_{ij}} = a_i$

$$\Rightarrow \quad \underline{a} = \sum_{i=1}^{3} (\underline{a}\cdot\hat{\underline{e}}_i)\,\hat{\underline{e}}_i$$

3.4 Kreuz-/Vektorprodukt

Def.: Das **Kreuz-/Vektorprodukt** zweier Vektoren $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten ist definiert als eine Abbildung:

$$\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\underline{a}, \underline{b}) \longmapsto \underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Indizes zyklisch vertauscht $1 \to 2 \to 3$

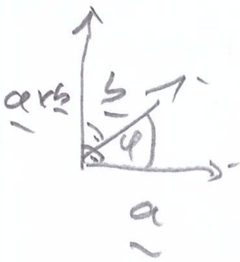
$(1\,2\,3) \to (2\,3\,1) \to (3\,1\,2)$

- Eigenschaften:
  - antisymmetrisch $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$
  - bilinear: $\underline{a} \times (\alpha \underline{b} + \beta \underline{c}) = \alpha(\underline{a} \times \underline{b}) + \beta(\underline{a} \times \underline{c})$
  - im Allgemeinen nicht assoziativ: $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \neq (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}$
  - Für $\underline{\hat{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\hat{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\hat{e}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} \underline{\hat{e}}_1 \times \underline{\hat{e}}_2 &= \underline{\hat{e}}_3 \\ \underline{\hat{e}}_2 \times \underline{\hat{e}}_3 &= \underline{\hat{e}}_1 \\ \underline{\hat{e}}_3 \times \underline{\hat{e}}_1 &= \underline{\hat{e}}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Rechte-Hand-Regel}$$

- geometrische Interpretation:

(i) $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a} \;\wedge\; \underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$



(ii) $|\underline{a} \times \underline{b}| =$ Fläche des von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

↳ $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \iff \underline{a} \parallel \underline{b}$

↳ $\underline{a} \times \underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \sin\varphi \; \underline{\hat{n}}$

Normalvektor senkrecht auf $\underline{a}$ und $\underline{b}$

- Jacobi-Identität:

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c})+\underline{b}\times(\underline{c}\times\underline{a})+\underline{c}\times(\underline{a}\times\underline{b})=\underline{0}$$

- Kreuzprodukt ist nur im $\mathbb{R}^3$ definiert.

- Physik: 1) Skalarprodukt: Arbeit, die ein Körper verrichtet:

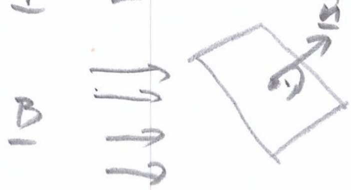
$$\Delta W=\underline{F}\cdot\Delta\underline{s}\quad\longrightarrow\quad W=\int_{Weg}\underline{F}\cdot d\underline{s}\quad \text{"Wegintegral"}$$

kleine Verschiebung

(ii) magnetischer Fluß durch Fläche:

$$\underline{\Phi}=\underline{B}\cdot(A\,\underline{\hat{n}})$$: nur $\underline{B}$ in Richtung von $\underline{\hat{n}}$ trägt bei

senkrecht auf A



2) Kreuzprodukt:

Drehmoment: $\underline{M}=\underline{r}\times\underline{F}$

Drehimpuls: $\underline{L}=\underline{r}\times\underline{p}$

Lorentzkraft: $\underline{F}=q\,\underline{v}\times\underline{B}$

3.5 Levi-Civita-Symbol

Def: Das Levi-Civita-Symbol ist definiert als

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{falls } ijk \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \\ -1 & \text{—— " — ungerade —— " ——} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gerade Permutationen: $(123), (312), (231)$

ungerade Permutationen: $(132), (321), (213)$

$$\Rightarrow \quad (\underline{a} \times \underline{b})_i = \sum_{jk=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k \equiv \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k$$

Einsteinsche Summenkonvention!
über doppelte Indizes wird summiert!

$\Rightarrow$ Graßmann-Identität:

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{klm} = \underbrace{\delta_{il}\, \delta_{jm}}_{\text{links-rechts}} - \underbrace{\delta_{im}\, \delta_{jl}}_{\text{außen-innen}}$$

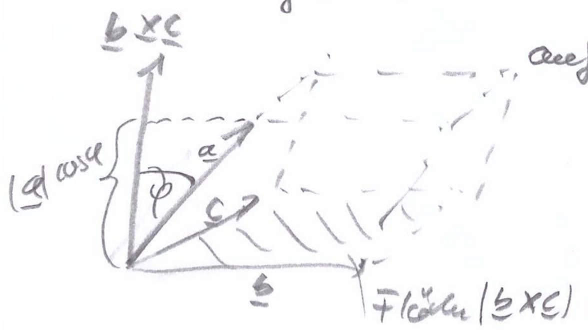
3.6 Mehrfachprodukte

(i) doppeltes Kreuzprodukt: bac-cab Regel

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}\,(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}\,(\underline{a} \cdot \underline{b})$$

(ii) Spatprodukt: $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$

geometrische Interpretation: Volumen eines von $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ aufgespannten Parallelepipeds.



$$V = \underbrace{|\underline{b} \times \underline{c}|}_{\text{Fläche}}\ \underbrace{|\underline{a}| \cos\varphi}_{\text{Höhe}}$$

↳ gleiches Volumen bei zyklischer Vertauschung:

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$$

↳ Berechnung über Determinante:

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_i \, (\underline{b} \times \underline{c})_i$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \, a_i \, b_j \, c_k$$

(iii) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d})(\underline{b} \cdot \underline{c})$

links rechts   außen innen

↳ $(\underline{a} \times \underline{b})^2 = (\underline{a} \cdot \underline{a})(\underline{b} \cdot \underline{b}) - (\underline{a} \cdot \underline{b})(\underline{b} \cdot \underline{a})$

$$= a^2 \; b^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2$$

$$= a^2 b^2 - (ab \cos\varphi)^2$$

$$= a^2 b^2 (1 - \cos^2\varphi)$$

$$= a^2 b^2 \sin^2\varphi$$

↳ $\underline{a} \times \underline{b} = a\, b \sin\varphi \; \hat{\underline{n}}$