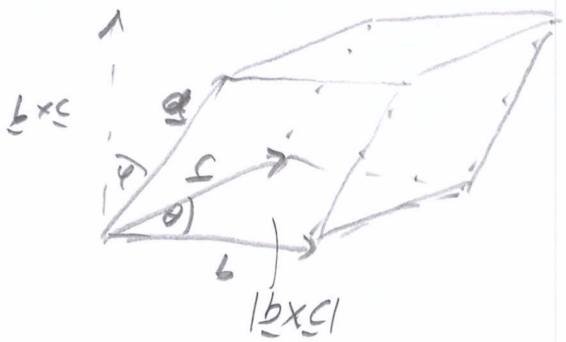
3.6 Products involving 3 vectors / triple product

(i) bac-cab rule : $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}\,(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}\,(\underline{a}\cdot\underline{b})$

"bac minus cab" rule

(ii) (scalar) triple product : $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$ = volume of parallelepiped spanned by $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$

box product



$$= \underline{b}\cdot(\underline{c}\times\underline{a}) = \underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b})$$

$$= \det\begin{pmatrix} | & | & | \\ \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{ijk=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i\, b_j\, c_k$$

(iii) Lagrange's identity :

$$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{c}\times\underline{d}) = \underbrace{(\underline{a}\cdot\underline{c})}_{\text{left}}\,\underbrace{(\underline{b}\cdot\underline{d})}_{\text{right}} - \underbrace{(\underline{a}\cdot\underline{d})}_{\text{outer}}\,\underbrace{(\underline{b}\cdot\underline{c})}_{\text{inner}}$$

4 Vektoranalysis

4.1 Konservative Vektorfelder
4.2 Ableitungen von Vektorfeldern
4.3 Gradienten- und Wirbelfelder
4.4 Raumkurven
4.5 Bogenlänge
4.6 Wegintegrale
 4.6.1 Skalare Wegintegrale
 4.6.2 Vektorielle Wegintegrale
4.7 Parametrisierung von Flächen
4.8 Oberflächenintegrale
4.9 Satz von Gauß
4.10 Satz von Stokes
4.11 Partielle Integration
(4.13 Integralsatz von Green)
(4.14 Basissysteme krummliniger Koordinaten)

4.1 (Konservative) Vektorfeldern

Def.: Ein Vektorfeld ist eine im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stetige Abbildung

$$v : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \underline{x} \longmapsto \underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ v_n(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

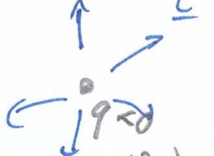
Def: Ein Vektorfeld $\underline{v}$ heißt C^s-Vektorfeld, falls die Komponenten $v_1, \dots, v_n$ s-fach stetig differenzierbar sind.

Bsp: - Elektrisches / magnetisches Feld
- Geschwindigkeitsfeld von Strömungen
- Gravitationsfeld

Def.: Ein Vektorfeld $\underline{v}(x)$ heißt konservativ (oder Gradientenfeld / Potenzialfeld), falls es sich als Gradient eines Skalarfeldes $\phi(\underline{x})$ (Potenzials) schreiben lässt:

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\nabla}\, \phi(\underline{x})$$

Bsp.: (i) Elektrisches Feld einer Punktladung q im Ursprung:



$$\underline{E}(\underline{x}) = -\underline{\nabla}\, \phi(\underline{x}) \quad \text{mit} \quad \phi(\underline{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{x}|}$$

Probe: $\underline{\nabla} \frac{1}{|\underline{x}|} = \underline{\nabla} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = -\frac{\underline{x}}{x^3}$

(ii) Frage: Hat das Vektorfeld

$$\underline{v} \equiv \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y e^{xy} + z \\ x e^{xy} \\ x + 2z \end{pmatrix}$$

ein Potenzial?

Antwort: Dann müsste $\phi(x,y,z)$ existieren mit

$$\partial_x \phi = v_x \;, \; \partial_y \phi = v_y \;, \; \partial_z \phi = v_z .$$

Idee: Integration & Angleichen der Konstanten

(a) $\phi = \int v_x \, dx = e^{xy} + xz + C_1(y,z)$

(b) $\phi = \int v_y \, dy = e^{xy} \qquad + C_2(x,z)$

(c) $\phi = \int v_z \, dz = xz + z^2 + C_3(x,y)$

$\Rightarrow$ Alle 3 Bedingungen erfüllt durch:

$C_1(y,z) = z^2, \; C_2(x,z) = xz + z^2, \; C_3(x,y) = e^{xy}$

$\Rightarrow \phi = e^{xy} + xz + z^2$

$\Rightarrow \underline{v}$ ist konservativ

4.2 Ableitung von Vektorfeldern

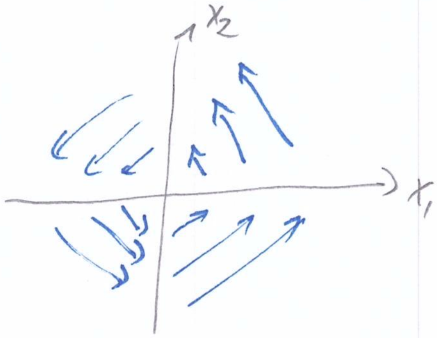
(i) Def: Die Rotation (Wirbeldichte) eines Vektorfeldes $\underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ v_2(\underline{x}) \\ v_3(\underline{x}) \end{pmatrix}$ ist definiert als (in kartesischen Koordinaten)

$$\operatorname{rot} \underline{v} \equiv \underline{\nabla} \times \underline{v} := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ v_2(\underline{x}) \\ v_3(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

oder auch: $(\operatorname{rot} \underline{v})_i = \varepsilon_{ijk} \, \partial_j v_k$ (Summenkonvention!)

$$\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \, \partial_j v_k$$

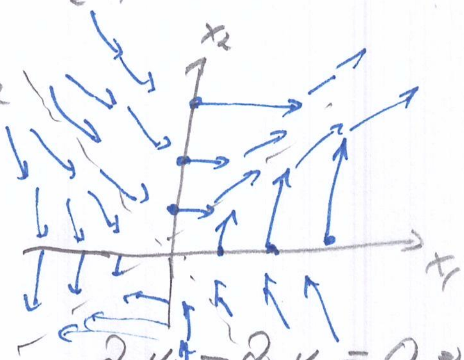
Bsp.: (a) $\underline{v} = \begin{pmatrix} -\omega x_2 \\ +\omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rot}\,\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega + \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix}$



$\Rightarrow$ rot $\underline{v}$ in z-Richtung (Rechte-Daumen-Regel)

(b) Bei Bsp.(a) $(\text{rot}\,\underline{v})_3 = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$

vergleiche



$\underline{v} = \begin{pmatrix} \omega x_2 \\ \omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

↳ $\underbrace{\partial_1 v_2}_{>0} - \underbrace{\partial_2 v_1}_{<0} \neq 0 \Rightarrow$ Wirbel!

$\underbrace{\partial_1 v_2}_{>0} - \underbrace{\partial_2 v_1}_{>0} = 0 \Rightarrow$ keine Wirbel!

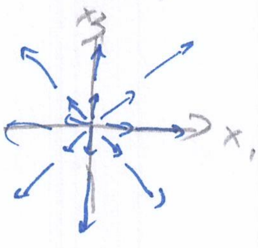
Idee: Wie ändert sich v_1 in Richtung 2 im Vergleich zu v_2 in Richtung 1?

(ii) Def: Die Divergenz (Quellendichte) von $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ v_2(\underline{x}) \\ v_3(\underline{x}) \end{pmatrix}$ ist definiert als:

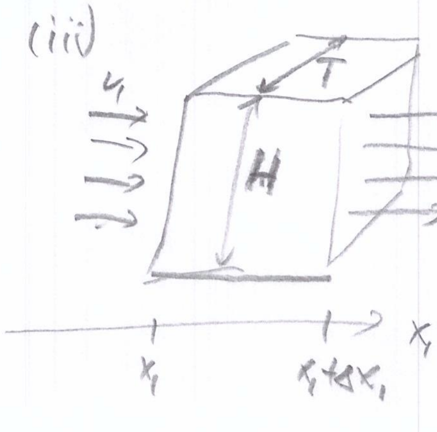
$$\text{div}\,\underline{v} \equiv \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \equiv \partial_i v_i \quad \text{(Summenkonvention)}$$

Bsp.: (i) $\underline{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} -\omega x_2 \\ \omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ (keine Quellen)

(ii) $\underline{\nabla} \cdot \underline{x} = \underline{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3$



(iii)



Zufluss: $Z = v_1(x_1)\,HT$

Abfluss: $A = v_1(x_1 + \Delta x_1)\,HT$

$\Rightarrow$ Netto pro Volumen:

$$\frac{1}{\Delta x_1 HT}(A - Z) = \frac{v_1(x_1 + \Delta x_1) - v_1(x_1)}{\Delta x_1} \xrightarrow[\Delta x_1 \to 0]{} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1)$$