4.2 Derivations of vector fields

(iii) Laplace-Operator: (a) $\Delta\phi := \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\phi)$ scalar field potential

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi$$

(b) $$\Delta\underline{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\underline{A} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\underline{A} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\underline{A} \overset{?}{=} \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\underline{A} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\underline{A}$$

$$= \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})$$

- rot, grad, div : linear operators
- productrules: (a) $\mathrm{div}(\phi\underline{v}) = \phi\,\mathrm{div}\,\underline{v} + (\mathrm{grad}\,\phi)\cdot\underline{v}$

$$\underline{\nabla}\cdot(\phi\underline{v}) = \phi(\underline{\nabla}\cdot\underline{v}) + (\underline{\nabla}\phi)\cdot\underline{v}$$

(b) $\mathrm{rot}(\phi\underline{A}) = \phi\,\mathrm{rot}\,\underline{A} + \mathrm{grad}\,\phi\times\underline{A}$

$$= \phi(\underline{\nabla}\times\underline{A}) + (\underline{\nabla}\phi)\times\underline{A}$$

4.3 Gradient field and curl

Theorem: (i) Gradientfields have no curl

$$\left.\begin{array}{l} \underline{v} = \underline{\nabla}\phi \implies \mathrm{rot}\,\underline{v} = \underline{0} \\[2em] \text{(ii)}\quad \mathrm{rot}\,\underline{v} = \underline{0} \implies \underline{v} = \underline{\nabla}\phi \end{array}\right\}\ \underline{v}\text{ conservative} \iff \mathrm{rot}\,\underline{v} = 0$$

Theorem: (i) $\underline{v} = \mathrm{rot}\,\underline{A} \implies$ no sink/no source ($\mathrm{div}\,\underline{v} = 0$)

(ii) $\mathrm{div}\,\underline{v} = 0 \implies \underline{v} = \mathrm{rot}\,\underline{A}$

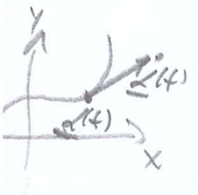
4.4 Raumkurven

Parametrisierung α einer Raumkurve $C:[a,b]\to\mathbb{R}^n$

Def: Eine Raumkurve α ist eine stetig differenzierbare Abbildung vom Intervall $I\subset\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$:

$$\underline{\alpha}: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \vdots \\ \alpha_n(t)\end{pmatrix}$$

Def: Die Ableitung $\dot{\underline{\alpha}}(t) := \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\underline{\alpha}(t+\Delta t)-\underline{\alpha}(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix}\dot\alpha_1(t)\\ \vdots \\ \dot\alpha_n(t)\end{pmatrix}$

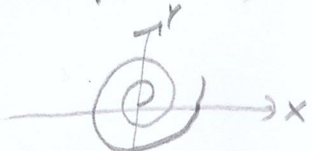


liefert den Tangentenvektor an die Kurve.

Def: Eine Raumkurve heißt regulär, wenn gilt: $\dot{\underline{\alpha}}(t)\neq\underline{0}\ \forall t\in I$.

Bsp.: (i) Archimedische Spirale (regulär für $t>0$)

$$t\longmapsto\begin{pmatrix}t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix}$$

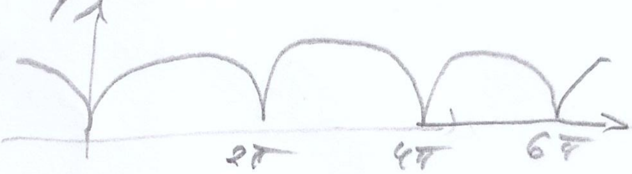


(ii) Schraubenlinie (regulär für $t\in\mathbb{R}$)

$$t\longmapsto\begin{pmatrix}R\cos t\\ R\sin t\\ h t\end{pmatrix}$$

(iii) Zykloide (nicht regulär für $t=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\dots$

$$t\longmapsto\begin{pmatrix}t-\sin t\\ 1-\cos t\end{pmatrix}$$

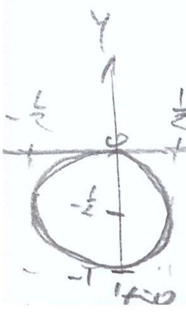


Punkt auf rollendem Rad

$$\dot{\underline{\alpha}}(t)=\begin{pmatrix}1-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\Rightarrow\dot{\underline{\alpha}}(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{ für } t=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\dots)$$

(iv) $$\underline{\alpha}: t\longmapsto\left(\frac{t}{t^2+1},\ -\frac{1}{t^2+1}\right)$$

Frage: Was beschreibt $\underline{\alpha}$?



$$\frac{x}{y}=-t\Rightarrow x=\frac{-\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2}+1}=\frac{x}{y\,\frac{x^2+y^2}{y^2}}=\frac{xy}{x^2+y^2}\Rightarrow x^2+y^2=y$$

$$\Rightarrow x^2+\left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4}\Rightarrow \text{Kreis mit Radius } \tfrac{1}{2} \text{ um } \left(0,-\tfrac{1}{2}\right).$$

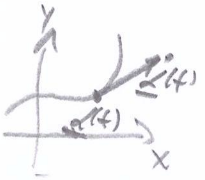
4.4 Raumkurven

Parametrisierung α einer Raumkurve $C:[a,b]\to\mathbb{R}^n$

Def: Eine **Raumkurve** α ist eine stetig differenzierbare Abbildung vom Intervall $I\subset\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$:

$$\alpha: I \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \vdots \\ \alpha_n(t)\end{pmatrix}$$

Def: Die Ableitung $\dot{\underline{\alpha}}(t) := \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\underline{\alpha}(t+\Delta t)-\underline{\alpha}(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix}\dot\alpha_1(t)\\ \vdots \\ \dot\alpha_n(t)\end{pmatrix}$



liefert den **Tangentenvektor** an die Kurve.

Def: Eine Raumkurve heißt **regulär**, wenn gilt: $\dot{\underline{\alpha}}(t)\neq\underline{0}\ \forall\, t\in I$.

Bsp.: (i) Archimedische Spirale (regulär für $t>0$)

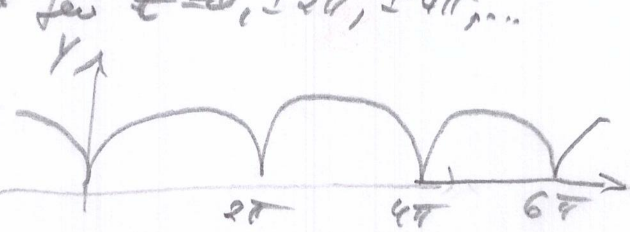
$$t\mapsto\begin{pmatrix}t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix}$$

(ii) Schraubenlinie (regulär für $t\in\mathbb{R}$)

$$t\mapsto\begin{pmatrix}R\cos t\\ R\sin t\\ h t\end{pmatrix}$$

(iii) Zykloide (nicht regulär für $t=0,\pm2\pi,\pm4\pi,\dots$

$$t\longmapsto\begin{pmatrix}t-\sin t\\ 1-\cos t\end{pmatrix}$$



Punkt auf rollendem Rad

$\dot{\underline{\alpha}}(t)=\begin{pmatrix}1-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{\alpha}}(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ für $t=0,\pm2\pi,\pm4\pi,\dots)$

(iv) $\underline{\alpha}: t\longmapsto\left(\dfrac{t}{t^2+1},\ -\dfrac{1}{t^2+1}\right)$

Frage: Was beschreibt $\underline{\alpha}$?

$$\frac{x}{y}=-t \Rightarrow x=\frac{-\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2}+1}=\frac{x}{y\,\frac{x^2+y^2}{y^2}}=\frac{xy}{x^2+y^2}\Rightarrow x^2+y^2=y$$

$$\Rightarrow x^2+\left(y-\tfrac12\right)^2=\tfrac14 \Rightarrow \text{Kreis mit Radius } \tfrac12 \text{ um } \left(0,\tfrac12\right).$$

4.5 Bogenlänge

Frage: Länge eines Kurvenstücks C? $(\underline{\alpha}:[a,b] \to C \subset \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \underline{\alpha}(t))$

Idee: Näherung durch Polygonzug / Sehnenpolygone

$$\Delta t = t_k - t_{k-1} \Leftrightarrow t_k = t_{k-1} + \Delta t$$

$$\Rightarrow L_m = \sum_{k=1}^{m} \left| \underline{\alpha}(t_k) - \underline{\alpha}(t_{k-1}) \right| \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\underline{\alpha}(t_k) - \underline{\alpha}(t_{k-1})}{\Delta t} \right| \Delta t$$

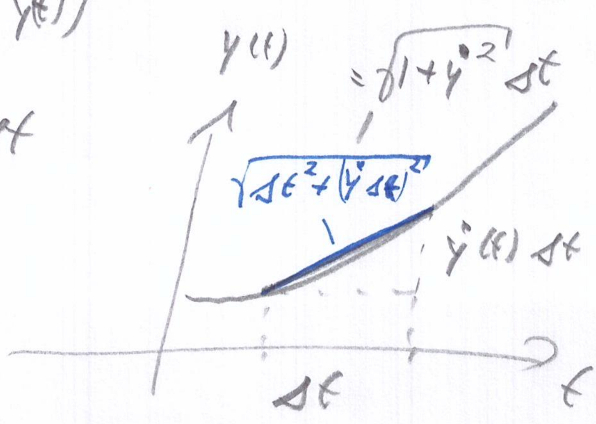
$$\underset{\Delta t \text{ klein}}{\approx} \sum_{k=1}^{m} \left| \dot{\underline{\alpha}}(t_{k-1}) \right| \Delta t$$

Satz: Für eine stetig differenzierbare Parametrisierung $\underline{\alpha}(t)$ der Kurve C $(\underline{\alpha}:[a,b] \to \mathbb{R}^n)$ gilt für die Länge von C:

$$L(C) = \int_a^b |\dot{\underline{\alpha}}(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}_i(t)^2}\,dt$$

Bsp.: $\underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow L(C) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{y}(t)^2}\,dt$$

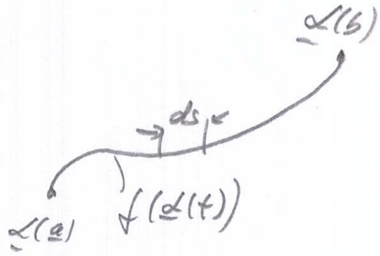


4.6 Wegintegrale

1. Skalares Wegintegral : bezieht sich auf Integrand (Skalarfeld)

Def.: Das **skalare Weg-/Kurvenintegral** von $f: \underline{x} \mapsto f(\underline{x})$ über eine Kurve $C: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \underline{\alpha}(t)$ ist definiert als

$$\int_C f(\underline{x})\, ds := \int_a^b f(\underline{\alpha}(t))\, |\underline{\dot\alpha}(t)|\, dt$$



mit dem **Bogenelement** $ds = |\underline{\dot\alpha}(t)|\, dt$.

Bsp.: (i) Länge einer Kurve ($\to$ 4.5): $f(\underline{x}) = 1$.

(ii) Kreisförmiger Draht um Ursprung mit Radius R und Längendichte ϱ (Masse pro Länge).

Frage: (a) Gesamtmasse

(b) Schwerpunkt

Idee: **Parametrisierung** der Drahtschleife $C: t \mapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow |\underline{\dot\alpha}(t)| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R$$

(a) $$M = \int_C dm = \int_C \varrho\, ds = \int_0^{2\pi} \varrho\, R\, dt = 2\pi R \varrho$$

(b) $$\underline{R}_S = \frac{1}{M} \int_C \underline{r}\, dm = \frac{1}{M} \int_C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dm$$

$\hookrightarrow$ x-Koordinate: $$X_S = \frac{1}{M} \int_C x\, dm = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} R\cos t\ \varrho R\, dt = 0 \quad (Y_S \text{ analog})$$

alternativ: $\underline{\alpha}(s) = R \begin{pmatrix} \cos 2s \\ \sin 2s \end{pmatrix}$ mit $s \in [0, \pi) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (X_S, Y_S) = (0,0)$

Kettenregel (...) als Substitution ...

2. vektorielle Wegintegrale (Integrand: Vektorfeld) $\int 3$

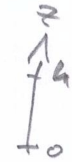
Def.: Das vektorielle Weg-/Kurvenintegral entlang einer mit $\underline{\alpha}(t)$ parametrisierten Kurve C über das Vektorfeld $\underline{v}$ ist definiert als

$$\int_C \underline{v}\cdot d\underline{s} := \int_a^b \underline{v}(\underline{\alpha}(t))\cdot \dot{\underline{\alpha}}(t)\,dt,$$

wobei $d\underline{s} = \dot{\underline{\alpha}}(t)\,dt$ der infinitesimale Tangentenvektor ist

Bsp.: mechanische Arbeit entlang eines Weges C

$$W = \int_C \underline{F}\cdot d\underline{s}, \quad \underline{F} = -mg\,\hat{\underline{e}}_z \text{ und } \underline{\alpha} : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto ht\,\hat{\underline{e}}_z$$



(*) s.a. 3a

$$\Rightarrow W = \int_0^1 -mg\,\hat{\underline{e}}_z \cdot h\,\hat{\underline{e}}_z\,dt = -mgh \quad \Rightarrow \dot{\underline{\alpha}} = h\,\hat{\underline{e}}_z$$

3. Wegintegral über konservatives Vektorfeld

$\underline{v}$ konservativ $\Rightarrow \underline{v} = \underline{\nabla}\phi$, C: Weg von $\underline{a}$ nach $\underline{b}$

$$\int_C \underline{v}\cdot d\underline{x} = \int_C \underbrace{(\underline{\nabla}\phi)\cdot d\underline{x}}_{d\phi}$$

totales Differential:

$$d\phi(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\phi\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\phi\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\phi\,dz = (\underline{\nabla}\phi)\cdot d\underline{x}$$

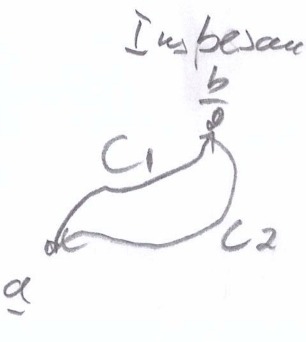
$$= \int_C d\phi = \phi(\underline{b}) - \phi(\underline{a})$$

(vgl.: $\int_a^b \frac{df}{dx}\,dx = f(b) - f(a)$

$\Rightarrow$ Wegintegral über konservativem Vektorfeld hängt nicht vom Weg ab!

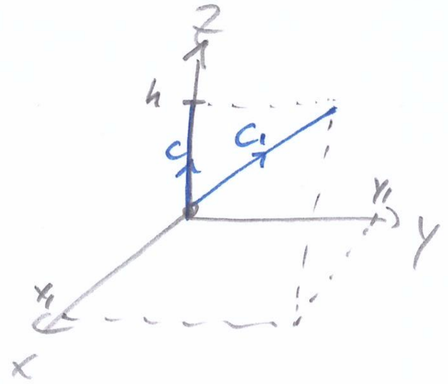
Insbesondere:

$$\int_{C_1} \underline{v}\cdot d\underline{x} + \int_{C_2} \underline{v}\cdot d\underline{x} = \oint_{C = C_1 \cup C_2} \underline{v}\cdot d\underline{x}$$



$$= \phi(\underline{b}) - \phi(\underline{a}) + \phi(\underline{a}) - \phi(\underline{b}) = 0$$

⊛ mechanische Arbeit entlang eines Weges C:



Parametrisierung von C: $\underline{\alpha}(t) = h t\, \hat{\underline{e}}_z,\ t \in [0,1]$

—— " —— C_1: $\underline{\beta}(t) = h t\, \hat{\underline{e}}_z + x_1 t\, \hat{\underline{e}}_x + y_1 t\, \hat{\underline{e}}_y$

$$W = \int_C \underline{F} \cdot d\underline{s} = \ldots = -mgh \quad (\text{s. S. 53})$$

$$W_1 = \int_{C_1} \underline{F} \cdot d\underline{s} = \int_0^1 (-mg)\, \hat{\underline{e}}_z \cdot \dot{\underline{\beta}}(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 dt\, (-mg) \Big[\hat{\underline{e}}_z \cdot h\, \hat{\underline{e}}_z + \underbrace{\hat{\underline{e}}_z \cdot x_1 \hat{\underline{e}}_x}_{=0} + \underbrace{\hat{\underline{e}}_z \cdot y_1 \hat{\underline{e}}_y}_{=0} \Big]$$

$\hat{\underline{e}}_z \perp \hat{\underline{e}}_x,\ \hat{\underline{e}}_z \perp \hat{\underline{e}}_y$

oder auch $\hat{\underline{e}}_i \cdot \hat{\underline{e}}_j = \delta_{ij}$

$$= \int_0^1 dt\, (-mg)\, h = -mgh = W$$

gilt auch für noch kompliziertere Wege von $z=0$ auf Höhe h.