6 Elemente der linearen Algebra

Wichtig für:
- Quantenmechanik
- Mechanik
- Differentialgleichungen
- Fourier-Transformation
- Datenanalyse
- ...

6. Elemente der linearen Algebra

Herausforderung: Lineare Algebra meist 2 volle VL für Mathematiker!
↳ hier: 2-3 Wochen nur!
⇒ Auswahl / Übersicht / Physikbrille

Achtung: viele Definitionen!
↳ Vokabellernen (damit wir uns überhaupt darüber unterhalten können)

Fokus: Intuition, Veranschaulichung, Beispiele, Physik

6.1 Lineare Gleichungen

Def: Lineare Gleichungen $L(u) = v$ sind definiert durch:

$$1)\quad L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$$

$$2)\quad L(\alpha u) = \alpha\, L(u)$$

u_1, u_2, u: Zahlen oder Vektoren

Bsp.: (i) Schwingungsgleichung: $$\underbrace{\left(m \frac{d^2}{dt^2} + \underbrace{\gamma \frac{d}{dt}}_{\text{Stokesche Reibung}} + k\right)}_{L} x(t) = F(t)$$

(ii) Poisson-Gleichung (etwa in 2D): $$\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}_{L} u(x,y) = v(x,y)$$

(iii) Lineares Gleichungssystem: $$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = y_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = y_2$$

$$\hookrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{L} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(iv) Schrödinger-Gleichung: $$\underbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi}_{L_1 \psi} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi}_{L_2 \psi}$$

(v) Maxwell-Gleichungen: $$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} B$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \qquad \underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Gegenbeispiel: Newtonsche Reibung:

$$m \ddot{x} + \underbrace{\tilde{\gamma} (\dot{x})^2}_{\text{quadratisch!}} = F(t)$$

⇒ Lineare Ableitungen [illegible]

§.2 Vektorräume

Def: Eine nichtleere Menge V mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt **Vektorraum** über einem Körper $\mathbb{K}$ (meist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), wenn für alle $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

(V1)	$\underline{v} + \underline{w} \in V,\ \lambda \cdot \underline{v} \in V$	Abgeschlossenheit	Abel'sche kommutative Gruppe
(V2)	$(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$	Assoziativität	
(V3)	$\exists\, \underline{0} \in V : \underline{u} + \underline{0} = \underline{u}$	neutrales Element	
(V4)	$\exists\, \underline{u}' \in V : \underline{u} + \underline{u}' = \underline{0}$	inverses Element	
(V5)	$\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$	Kommutativität	
(V6)	$\lambda \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \lambda \cdot \underline{u} + \lambda \cdot \underline{v}$	Distributivität	
(V7)	$(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda \underline{u} + \mu \underline{u}$		
(V8)	$(\lambda \mu) \cdot \underline{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{u})$		
(V9)	$1 \cdot \underline{u} = \underline{u}$		

Def: Die Elemente eines Vektorraums heißen **Vektoren**.

↳ Vektoren: mathematische Objekte, die man addieren und mit einem Skalar multiplizieren kann. Existenz von $\underline{v} \cdot \underline{w}$, $\underline{v} \times \underline{w}$ nicht notwendig!

↳ nicht unbedingt nur Pfeile in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

Bsp.: (i) $V = \mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \middle|\ v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{K} \right\}$ etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(ii) Polynome vom Grad $\leq n \in \mathbb{N}_0$:

$$V = \{ a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{K} \ \forall i \}$$

(iii) Funktionenräume:

$$V = \{ f : M \to \mathbb{K} \} \text{ mit } f + g : x \mapsto f(x) + g(x),\ \alpha \cdot f : x \mapsto \alpha f(x) \}$$

Def: Eine nichtleere Teilmenge U eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V heißt Untervektorraum, wenn für $\underline{u}, \underline{v} \in U$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

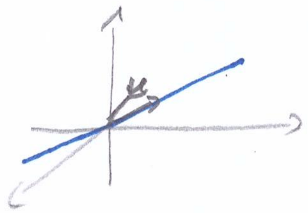
(U1) $\underline{u} + \underline{v} \in U$

(U2) $\lambda \underline{u} \in U$

Bem: Untervektorräume (Teilräume) sind Vektorräume

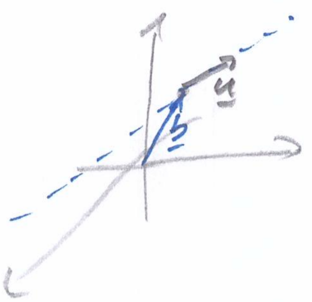
Bsp: (i) Lösungen $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ von $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$ bilden einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$:

(ii) Gerade im $\mathbb{R}^3$ in Richtung $\underline{u}$: $g = \{\underline{x} = \underline{u}t \mid t \in \mathbb{R}\}$



Gegenbeispiel: um $\underline{b} \neq \underline{0}$ (nicht parallel) zu $\underline{u}$ verschobene Gerade

$$g' = \{\underline{x} = \underline{u}t + \underline{b} \mid t \in \mathbb{R}\}$$: kein Untervektorraum!



etwa: $2\underline{x}(t=0) = 2\underline{b} \notin g'$

$\Rightarrow$ affiner Teilraum/Unterraum

6.3 Linearkombination, lineare Hülle (Aufspann), Erzeugendensystem

Def: Jeder Vektor der Form

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \;, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}$$

heißt Linearkombination der Vektoren $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$.

Def.: Die Menge aller Linearkombination aus $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ heißt ihr Aufspann (lineare Hülle, Erzeugnis): $\operatorname{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$

Bsp.: $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$ (auch ohne $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$)

↳ Der Aufspann ist ein Teilraum von V.

Def.: Ist $X \subseteq V$ und $\operatorname{span}(X) = U$ ein Teilraum von V (alle Elemente von U eine Linearkombination von X
$\forall \underline{u} \in U : \underline{u} = \alpha_1 \underline{x}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{x}_n \;, \; \underline{x}_i \in X \;, \; \alpha_i \in \mathbb{K}$),
so nennt man X ein Erzeugendensystem von U. (X erzeugt U)

Def.: U heißt endlich erzeugt, wenn U ein endliches Erzeugendensystem hat

Def.: Die Vektoren $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ heißen linear unabhängig, wenn aus $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0}$ folgt: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Andernfalls heißen sie linear abhängig.

Alternativ (i) $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für jede echte Teilmenge T von $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ gilt:

$$\operatorname{span}(T) \subsetneq \operatorname{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$$

D.h.: T spannt nur einen Teil von $\operatorname{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ auf.

(ii) linear unabhängig, wenn sich kein $\underline{v}_i$ durch Linearkombination der anderen $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_n$ darstellen lässt.