6 Elements of linear algebra

6.1 Linear equations

linear equations $L(u)=v$ with linear operator L:
$$\text{(i)}\ L(u+v)=L(u)+L(v) \qquad \text{(ii)}\ L(\alpha u)=\alpha L(u)$$

6.2 Vektorspaces (linear spaces)

a non-empty set V with a binary operation $+$ and a binary function $\cdot$ is called a vector space over a field $\mathbb{K}$, if the following holds for all $\underline{v}, \underline{w}, \in V$ and $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

(V1) $\underline{v}+\underline{w} \in V$, $\lambda \cdot \underline{v} \in V$

(V2) $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w} = \underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$ (associativity)

(V3) $\exists\, \underline{0} \in V : \underline{u}+\underline{0}=\underline{u}$ (neutral element)

(V4) $\exists\, \underline{u}' \in V : \underline{u}+\underline{u}'=\underline{0}$ (inverse element)

(V5) $\underline{u}+\underline{v} = \underline{v}+\underline{u}$ (commutativity)

(V6) $\lambda \cdot (\underline{u}+\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{u} + \lambda \cdot \underline{v}$ (distributivity)

(V7) $(\lambda+\mu)\,\underline{u} = \lambda \underline{u} + \mu \underline{u}$

(V8) $(\lambda\mu)\cdot \underline{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{u})$

(V9) $1 \cdot \underline{u} = \underline{u}$

vector: element of a vector space

linear subspace: $U \subset V$ with V $\mathbb{K}$-vectorspace if
for $\underline{u}, \underline{v} \in U$, $\lambda \in \mathbb{K}$: (U1) $\underline{u}+\underline{v} \in U$
(U2) $\lambda\, \underline{u} \in U$

6.3 linear combination, span, generating set

linear combination $\alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$

span : set of all linear combinations of $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$: $\operatorname{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$

generating set: $X \subseteq V$, $\operatorname{span}(X) = U$: $\forall \underline{u} \in U$: $\underline{u} = \alpha_1 \underline{x}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{x}_n$, $\underline{x}_i \in X$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$

linear independence: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$

alternatively: no vector of a set can be written as a linear combination of the other elements

Bsp: (i) $\underline{u}, \underline{v}$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ $\underline{u} = \lambda \underline{v}$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ linear unabhängig

(iii) $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\underline{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=\underline{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\underline{v}_3} \right\}$ linear unabhängig?

$\hookrightarrow$ Teste $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rrrl} \alpha_1 & & +3\alpha_3 & =0 \\ -\alpha_1 & +\alpha_2 & -4\alpha_3 & =0 \\ & -2\alpha_2 & +2\alpha_3 & =0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 \end{array}\right\} \alpha_1 + 3\alpha_3 = 0$$

$\Rightarrow$ Lösg: $\alpha_2 = \alpha_3 = 1, \alpha_1 = -3$ $\Rightarrow$ linear abhängig!

$\Rightarrow$ $\underline{v}_3 = 3\underline{v}_1 - \underline{v}_2$ $\Rightarrow$ $\operatorname{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\} = \operatorname{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

6.4 Basis eines Vektorraums, Dimension

Def.: Die Menge $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ von Vektoren eines $\mathbb{K}$-Vektorraums heißt **Basis** von V, wenn sich jeder Vektor $\underline{v} \in V$ auf genau eine Linearkombination $\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n$

darstellen lässt. ($\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$)

Die durch $\underline{v}$ eindeutig bestimmten Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ heißen **Koordinaten** von $\underline{v}$ bzgl. der Basis B:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B$$

Satz: $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ ist genau dann eine Basis von V, wenn gilt:

- $\operatorname{span} B = V$ (B erzeugt V)
- B ist linear unabhängig.

D.h.: Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei B Basis von V

$\Rightarrow$ Span $B = V$ und alle $\underline{v} \in V$ lassen sich schreiben als

$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{b}_n \Rightarrow$ also auch $\underline{v} = \underline{0}$.

mit eindeutigen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

$\Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ (einzige Lösung)

$\Rightarrow B$ linear unabhängig

"$\Leftarrow$" Sei B linear unabhängiges Erzeugendensystem

Angenommen: $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{b}_i$ (2 Darstellungen von $\underline{v}$)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \underline{v}_i = \underline{0}$

$\Rightarrow \alpha_i = \beta_i \ \forall i$

$\Rightarrow$ Koordinaten eindeutig (also B ist Basis) $\square$

Bsp: (i) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^2$

(ii) $B = \{ X^n \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$ ist Basis des Vektorraumes der Polynome

$\mathbb{K}[X] := \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mid n \in \mathbb{N}_0, a_k \in \mathbb{K} \ \forall k \right\}$

B hat unendlich viele Elemente.

Def: Sei B eine Basis aus n Vektoren eines endlich erzeugten Vektorraumes V. Dann heißt n die Dimension von V: $\dim V = n$. Ist V nicht endlich erzeugt, setzen wir $\dim(V) = \infty$

Bsp.: (i) $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ (ii) $\dim(\mathbb{C}^3) = 3$ (iii) $\dim(\mathbb{K}[X]) = \infty$

Satz: Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

(Jedes Erzeugendensystem enthält eine Basis) (Basisauswahlsatz)

(Jede linear unabhängige Teilmenge von V kann durch Hinzunehmen weiterer Vektoren zu einer Basis ergänzt werden.)

(Basisergänzungssatz)

Bem: $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension n:

(i) Je n linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis von V.

(ii) Jedes Erzeugendensystem mit n Elementen bildet eine Basis

(iii) Mehr als n Vektoren sind stets linear abhängig.

6.5 Matrizen als Darstellung linearer Abbildungen

Satz: Sei $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ eine Basis von V. Dann ist die lineare Abbildung L durch die Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt.

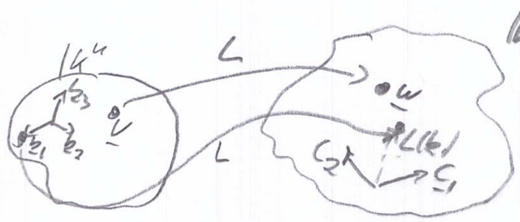
- Alle $\underline{v} \in V$ lassen sich auf genau eine Weise schreiben: $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{b}_i$

$$\Rightarrow L(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L(\underline{b}_i).$$

- $L: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $\underline{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ geordnete Basis von $\mathbb{K}^n$ (Reihenfolge festgelegt)

$\underline{v} \mapsto \underline{w} = L(\underline{v})$ $\qquad \underline{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$ — " — von $\mathbb{K}^m$

$$\Rightarrow \underline{w} = \underbrace{L(\underline{b}_1)}_{\text{Bild des 1. Basisvektors}} \alpha_1 + \dots + L(b_n)\alpha_n$$



$$\Leftrightarrow \omega_1 = L(\underline{b}_1)_1 \alpha_1 + \dots + L(\underline{b}_n)_1 \alpha_n$$

$$\vdots$$

$$\omega_m = \underbrace{L(\underline{b}_1)_m}_{\substack{m\text{-te Koordinate} \\ \text{bzgl. Basis } C \text{ des Bilds} \\ \text{des 1. Basisvektors von } B}} \alpha_1 + \dots + L(\underline{b}_n)_m \alpha_n$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix}_C = \underbrace{\begin{pmatrix} L(\underline{b}_1)_1 & \dots & L(b_n)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ L(\underline{b}_1)_m & \dots & L(b_n)_m \end{pmatrix}}_{=\underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B$$

„Zeile mal Spalte"
„Matrix mal Vektor"

Koordinaten in Basis C

Koordinaten zur Basis B

$\underline{\underline{A}}$: Matrix legt eindeutig die Abbildung L fest

Mit $a_{ij} = L(\underline{b}_j)_i \quad j = 1,\dots,n, \quad i = 1,\dots,m$

ergibt sich eine $m \times n$ Matrix $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$$\Rightarrow \quad \underline{w}_C = \underline{\underline{A}}\, \underline{v}_B$$

↳ l-ter Basisvektor: $\underline{b}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert l-te Spalte von $\underline{\underline{A}}$: $\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Allgemein:

Kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \underline{v} \in V & \xrightarrow{\quad L \quad} & \underline{w} \in W \\ \downarrow k_B & & \downarrow k_C \\ \underline{v}_B \in \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\quad {}_C L_B \quad} & \underline{w}_C \in \mathbb{K}^m \end{array}$$

Koordinatenabbildung

Verknüpfung

darstellende Matrix: ${}_C L_B : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit ${}_C L_B = k_C \circ L \circ k_B^{-1}$

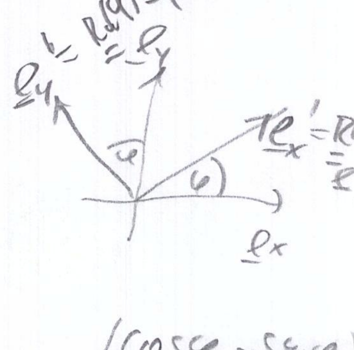
Bsp.: (i) Ableitungsoperator:

$B = \{p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2\}$: geordnete Basis des Vektorraums der Polynome mit Grad ≤ 2.

Ableitungsoperator $D = \frac{d}{dx}$ hat Bilder von $p_0, \dots, p_2$:

$D p_0 = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad D p_1 = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad D p_2 = 2x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_B$

$$\Rightarrow \quad {}_B\underline{\underline{D}}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



(ii) Rotation in $\mathbb{R}^2$ um Winkel φ:

$B = \{\underline{e}_x, \underline{e}_y\}$ mit $\underline{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad \underline{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$

$$\left.\begin{array}{l} ↳ \underline{e}_x' = \cos\varphi\, \underline{e}_x + \sin\varphi\, \underline{e}_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_B \\ \underline{e}_y' = -\sin\varphi\, \underline{e}_x + \cos\varphi\, \underline{e}_y = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}_B \end{array}\right\} \Rightarrow {}_B\underline{\underline{R}}_B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

6.6 Matrizenrechnung

$\underline{\underline{A}} = \{a_{ij}\}$, $\underline{\underline{B}} = \{b_{ij}\}$, $\underline{\underline{C}} = \{c_{ij}\}$ Matrizen

(i) Summe: $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + (\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) \quad \text{assoziativ}$$

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}} \quad \text{(kommutativ)}$$

(ii) skalare Multiplikation: $(\alpha \underline{\underline{A}})_{ij} = \alpha a_{ij}$, $\alpha \in \mathbb{K}$

↳ Matrizen $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ bilden einen Vektorraum der Dimension mn

(iii) Multiplikation

$$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{m \times n}, \quad \underline{\underline{B}} = \mathbb{K}^{n \times p} \Rightarrow \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \in \mathbb{K}^{m \times p}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \equiv a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, p$$

Bsp.: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & +2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

offenbar $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ (nicht kommutativ)

aber: $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\,\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}$ (distributiv)

$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\,\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})$ (assoziativ)

$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ nur definiert, falls Anzahl Spalten von $\underline{\underline{A}}$ = # Zeilen von $\underline{\underline{B}}$