6.7 Rank of a matrix

linear map $L: V \to W$ with representing matrix $\underline{\underline{M}}_L$

- column rank: number of linearly independent columns
- row rank: —"— rows

$\Rightarrow$ row rank = column rank = rang$(\underline{\underline{M}}_L) \equiv$ rank$(\underline{\underline{M}}_L)$

- $L: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ injektive (one-to-one) $\Leftrightarrow$ rank $\underline{\underline{M}}_L = n$ (full column rank) ; $\underline{\underline{M}}_L \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$$\underline{\underline{M}}_L = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \\ m_{m1} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

- $L: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ surjective (onto/full image) $\Leftrightarrow$ rank $\underline{\underline{M}}_L = m$ (full row rank)
- $L: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ bijektive $\Leftrightarrow$ rank $\underline{\underline{M}}_L = m = n$

- transposed matrix: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ with $(\underline{\underline{A}}^T)_{ij} = a_{ji}$

  rank $\underline{\underline{A}}^T$ = rank $\underline{\underline{A}}$

- adjoint matrix: $\underline{\underline{C}} \in \mathbb{C}^{m \times n} \Rightarrow \underline{\underline{C}}^+ \in \mathbb{C}^{n \times m}$ with $(\underline{\underline{C}}^+)_{mn} = a_{nm} - i b_{nm}$

$$\underline{\underline{C}}^+ = (\underline{\underline{C}}^*)^T = (\underline{\underline{C}}^T)^* = \underline{\underline{C}}^H \leftarrow \text{Hermitian}$$

- orthogonal matrix: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ with $\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{1}}$

- unitary matrix: $\underline{\underline{C}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ with $\underline{\underline{C}}^+ \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{C}}^+ = \underline{\underline{1}}$

6.8 Lösen linearer Gleichungssysteme (Gauß'sches Eliminationsverfahren)

Löse: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x}=\underline{b}$, $\underline{\underline{A}}\in\mathbb{K}^{m\times n}$, $\underline{x}\in\mathbb{K}^{n}$, $\underline{b}\in\mathbb{K}^{m}$

(m Gleichungen mit n Unbekannten)

Bsp:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_3=2\\ x_1+x_2+x_3=2\\ 3x_1+3x_2+x_3=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\3&3&1\end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}_{\underline{x}}=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

Schritt 1: Zeilen vertauschen, sodass oben links $a_{11}\neq 0$ (hier ok)

Schritt 2: Stufenform herstellen (durch Äquivalenzumformungen)

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\1&1&1&2\\3&3&1&0\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \mathrm{II}':\ \mathrm{II}-\mathrm{I}\\ \mathrm{III}':\ \mathrm{III}-3\mathrm{I}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&-2&0\\0&-3&-8&-6\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}'-3\mathrm{II}'\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-1&-2&0\\0&0&-2&-6\end{array}\right)$$

Schritt 3: Normierung der Zeilen

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&2&0\\0&0&1&3\end{array}\right)$$

Schritt 4: Rückwärts einsetzen

$x_3=3 \Rightarrow x_2=-2x_3=-6$, $x_1=2-3x_3-2x_2=5 \Rightarrow \underline{x}=\begin{pmatrix}5\\-6\\3\end{pmatrix}$

(Test, ob's stimmt!)

Lösbarkeit: für $m=n$:

(i) $\operatorname{rang}\underline{\underline{A}}=n$: $\operatorname{Bild}(A)=\mathbb{K}^n \Rightarrow$ Lösung existiert und ist eindeutig

(ii) $\operatorname{rang}\underline{\underline{A}}<n$: – Lösungsmenge (Gerade / Ebene) falls $\underline{b}\in\operatorname{Bild}(A)$

– Kein Lösung, falls $\underline{b}\notin\operatorname{Bild}(\underline{\underline{A}})$

Bsp: $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow s:=x_3$, $x_2=-2s$, $x_1=2-2x_2-3x_3$

$=2-s$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge: $\underline{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $s\in\mathbb{R}$

6.9 Invertieren von Matrizen

Lösen von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ per **inverse Matrix** $\underline{\underline{A}}^{-1}$, sodass

$$\underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}}_{\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b} \Rightarrow \underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$$

Def: Eine quadratische Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt **invertierbar (regulär)**, falls eine Matrix $\underline{\underline{B}}$ existiert mit $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

B ist eindeutig bestimmt und heißt **Inverse** zu $\underline{\underline{A}}$: $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$

- $(\underline{\underline{A}}^{-1})^{-1} = \underline{\underline{A}}$
- $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar $\Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ invertierbar: $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$

$$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})(\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}) = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}}^{-1})\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \mathbb{1}$$

- $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar $\Leftrightarrow \operatorname{rg} \underline{\underline{A}} = n$
- allgemein: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$ Falls $ad-bc \neq 0$: $\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ **Cramersche Regel**

$(\det \neq 0)$

Bsp: (i) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Test $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar $(\operatorname{rg} \underline{\underline{A}} = 1)$

(iii) $\underline{\underline{R}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{R}}(\alpha)^{-1} = \underline{\underline{R}}(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Rotationsmatrix

da $\underline{\underline{R}}(\alpha)\,\underline{\underline{R}}(\alpha) = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Wie geht Invertieren allgemein?

$$\left(\underline{\underline{A}} \,\middle|\, \underline{\underline{\mathbb{1}}}\right) \Longrightarrow \left(\underline{\underline{\mathbb{1}}} \,\middle|\, \underline{\underline{A}}^{-1}\right)$$

Umformen nach Gauß'schem Verfahren (links wie rechts)

Bsp.: (i)

$$\begin{array}{r} \mathrm{I}: \\ \mathrm{II}: \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \mathrm{I}' = \mathrm{I} - \mathrm{II} \\ \mathrm{II}' \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \mathrm{I}'' \\ \mathrm{II}'' = \mathrm{II}' - 2\mathrm{I}' \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \mathrm{I}''' \\ \mathrm{II}''' = -\mathrm{II}'' \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \mathrm{I}''' - 3\mathrm{II}''' \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Test} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15+16 & 24-24 \\ -10+10 & 16-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \dots \longrightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.10 Determinante

"alternierende Multilinearform auf Spaltenvektoren"
↓

Def.: Gegeben sei $\underline{\underline{A}} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Für $n=1$: $\underline{\underline{A}} = a_{11}$ definieren wir $\det \underline{\underline{A}} = a_{11}$ als **Determinante**

Für $n\geq 2$: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$: $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, a_{i1} \det(\underline{\underline{A}}_{i1})$

Achtung! nicht $(\underline{\underline{A}})_{ij} = a_{ij}$

wobei $\underline{\underline{A}}_{ij}$ hervorgeht aus $\underline{\underline{A}}$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte

$\underline{\underline{A}}_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22}\end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{A}}_{21} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}}\end{pmatrix}$

Bsp.: (i) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $n=2 \Rightarrow \det \underline{\underline{A}} = a_{11} \underbrace{\det(\underline{\underline{A}}_{11})}_{=\det a_{22} = a_{22}} - a_{21} \underbrace{\det(\underline{\underline{A}}_{21})}_{=\det a_{12} = a_{12}}$

$\underline{b} \quad \underline{c}$ (Spalten) Fläche

$= a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$

(ii)

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = 1 \det\begin{pmatrix}5&6\\8&9\end{pmatrix} - 4 \det\begin{pmatrix}2&3\\8&9\end{pmatrix} + 7 \det\begin{pmatrix}2&3\\5&6\end{pmatrix}$$

$$= 1\cdot(5\cdot 9 - 8\cdot 6) - 4\cdot(2\cdot 9 - 3\cdot 8) + 7\cdot(2\cdot 6 - 3\cdot 5)$$

$$= -3 \quad -4\,(-6) \quad +7\,(-3)$$

$$= -3 \quad +24 \quad -21$$

$$= 0$$

(iii) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$

(iv) $\det(\mathbb{1}_n) = 1$

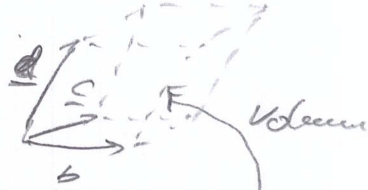
• $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & + & + \quad + \\ \underline{b} & \underline{c} & \underline{d} & & \end{array}$$

(Sarrus-Regel)

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$



$\det \underline{\underline{A}} = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{d})$

falls $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lin. abhängig

Eigenschaften: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(i) $\det \underline{\underline{A}}^T = \det \underline{\underline{A}}$

(ii) $\det \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{B}}$

(iii) $\det \underline{\underline{A}}^{-1} = \dfrac{1}{\det \underline{\underline{A}}}$

(iv) $\det \underline{\underline{A}} = 0 \iff \operatorname{rang} \underline{\underline{A}} < n$, $\underline{\underline{A}}$ singulär

$\det \underline{\underline{A}} \neq 0 \iff \operatorname{rang} \underline{\underline{A}} = n$, $\underline{\underline{A}}$ regulär (invertierbar)

(v) Entwicklung nach beliebiger Zeile oder Spalte:

r-te Zeile: $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{r+s} a_{rs} \det \underline{\underline{A}}_{rs}$

s-te Spalte: $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+s} a_{rs} \det \underline{\underline{A}}_{rs}$, $\underline{\underline{A}}_{rs} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$

Bsp.: $\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} = 0$, klar, weil $2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{rang} \underline{\underline{A}} = 2$

↪ Spaltenvektoren (Bilder der Basisvektoren) spannen nur eine Ebene auf $\Rightarrow$ Volumen 0.