6.11 Coordinate transformation (change of basis)

$\mathbb{K}$ vector space V with 2 basis sets: $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$, $C = \{\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n\}$

$$\Rightarrow \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \underline{c}_i \Leftrightarrow \underline{v}_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

coordinates w.r.t. B and C, resp.

- transformation matrix: $\underline{v}_C = {}_C\underline{\underline{M}}_B \, \underline{v}_B =: \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{v}_B$ given by

$${}_C\underline{\underline{M}}_B = \begin{pmatrix} | & & | \\ (\underline{b}_1)_C & \cdots & (\underline{b}_n)_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

- $L : V \to V$ linear map:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "k_B"] & V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "k_B"] & V \arrow[d, "k_C"] \\
\underline{u}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_B\underline{\underline{L}}_B"'] & \underline{v}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_C\underline{\underline{M}}_B = \underline{\underline{S}}^{-1}"'] & \underline{v}_C \in \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \underline{v}_B = {}_B\underline{\underline{L}}_B \, \underline{u}_B$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1} \underline{v}_B}_{\underline{v}_C} = \underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1} \, {}_B\underline{\underline{L}}_B \, \underline{\underline{S}}}_{{}_C\underline{\underline{L}}_C} \overbrace{}^{\mathbb{1}}\!\!\!\! \underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1} \underline{u}_B}_{\underline{u}_C}$$

$$\underline{v}_C = {}_C\underline{\underline{L}}_C \, \underline{u}_C$$

6.12 Eigenvalue problem

- $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n\times n} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{K}$ eigenvalue of $\underline{\underline{A}}$ if $\underline{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{\underline{0}\}$ exists with

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$$

$\underline{v}$: Eigenvektor

- subspace $\mathrm{Eig}_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \{\underline{v} \in \mathbb{K}^n \mid \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}\}$: eigenspace (Eigenvektorraum)

- characteristic polynomial: $\chi_{\underline{\underline{A}}}(x) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}})$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

- λ eigenvalue of $\underline{\underline{A}} \Leftrightarrow \chi_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = 0$

- $\chi_{\underline{\underline{A}}}(x) = \underbrace{(\lambda_1 - x)^{k_1} \cdots (\lambda_r - x)^{k_r}}_{\text{factorization of } \chi_{\underline{\underline{A}}}}$ with $k_1 + \ldots + k_r = n$

- k_i: algebraic multiplicity

- $\dim \mathrm{Eig}_{\underline{\underline{A}}}(\lambda)$: geometric multiplicity

- $\dim \mathrm{Eig}_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) > 1$: λ is called degenerate (entartet).

Bsp.: (i) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$ mit $\dim \mathrm{Eig}_A(\lambda) = \mathbb{R}^2$

(ii) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$$= -\lambda(2-\lambda) + 1$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1$$
$$= (\lambda - 1)^2 \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Aber $\underline{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$ ist einziger Eigenvektor

Test: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0}$

6.13 Diagonalisieren

$L: V \to V$ mit Matrix ${}_C\underline{\underline{L}}_C$ bzgl. Basis C

Aufsuchen Basis $\underline{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ aus Eigenvektoren von ${}_C\underline{\underline{L}}_C$

$${}_C\underline{\underline{L}}_C \, \underline{b}_i = \lambda_i \underline{b}_i$$

$\Rightarrow {}_B\underline{\underline{L}}_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ Diagonalform.

Bilden die Eigenwerte

Test: $\left({}_B\underline{\underline{L}}_B\right)_{ij} = \left(\underline{\underline{S}}^{-1} \, {}_C\underline{\underline{L}}_C \, \underline{\underline{S}}\right)_{ij}$

$$= \sum_k (S^{-1})_{ik} \sum_l ({}_C\underline{\underline{L}}_C)_{kl} \underbrace{S_{lj}}_{(\underline{b}_j)_{C,l}}$$

$$= \sum_k (S^{-1})_{ik} \sum_l ({}_C\underline{\underline{L}}_C)_{kl} (\underline{b}_j)_{C,l}$$

$$= \sum_k (S^{-1})_{ik} \, \lambda_j \underbrace{(b_j)_{C,k}}_{(S)_{kj}} \qquad S = \left((b_1)_C \ \dots \ (b_n)_C \right)$$

$$= \lambda_j \sum_k \underbrace{(S^{-1})_{ik} \, (S)_{kj}}_{\delta_{ij}}$$

$$= \lambda_j \delta_{ij}$$

Def: Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt **diagonalisierbar**, wenn eine invertierbare Matrix S existiert, sodass $D = S^{-1} A S$ Diagonalform hat.

Satz: A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Basis aus Eigenvektoren.

(Basistransformationsmatrix $S = (b_1 \dots b_n)$)

7. Differenzialgleichungen

7.1 Beispiel

- Newtonsche Bewegungsgleichung: $m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}(\underline{r})$ für freien Fall: $\underline{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \ddot{z}(t) = -g \quad$ (lineare, inhomogene DGL 2. Ordnung)

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung durch zweimaliges Integrieren:

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -gt + v_0 \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0 \end{aligned}\right\} \quad v_0, z_0: \text{Integrationskonstanten}$$

gg. der Anfangsbedingungen

$z_0(0) = h, \; v_0(0) = 0$

$\Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$

7.2 Begriffe

- gewöhnliche DGL: nur Funktionen einer Variablen
- partielle " : Funktionen mehrerer Variablen
- DGL n-ter Ordnung: enthält bis n-te Ableitungen
- Menge aller Lösungen (allgemeine Lösung) enthält n Integrationskonstanten (durch Anfangs- oder Randbedingungen festgelegt)
- lineare DGL: enthält Funktionen und Ableitung in 1. Potenz.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} = b(x)$$

- inhomogene DGL: mit additivem Term: $b(x) \neq 0$
- homogene DGL: ohne — " — : $b(x) = 0$

($y(x) = 0$ ist Lösung)

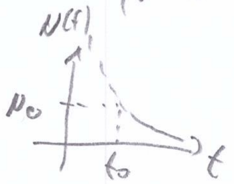
7.3 Lösungsstrategien

(i) direkte Integration: $\overset{\frac{dy}{dx}}{y'(x)} = f(x) \Rightarrow y(x) = \int_{x_0}^{x} dx'\, f(x')$ (s. 7.1)

(ii) Trennung der Variablen: $y'(x) = g(y(x))\, h(x) \rightsquigarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx$

Integrale lösen & nach $y(x)$ auflösen

Bsp: $\dot{N}(t) = -\alpha N(t) \rightsquigarrow \int_{N_0}^{N} \frac{1}{N'}\,dN' = -\alpha \int_{t_0}^{t} dt'$
(radioaktiver Zerfall)



$\Rightarrow \ln N - \ln N_0 = -\alpha(t-t_0)$

$\Rightarrow \quad N(t) = N_0 e^{-\alpha(t-t_0)}$

$e^c = N_0 e^{+\alpha t_0}$ für allgemeine Lsg.

(iii) Ansatz/Raten: Kandidaten: exp, sin, cos, Polynome..

Bsp: $y''(x) = \alpha^2 y(x)$: Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} = \alpha^2 e^{\lambda x}$ erfüllt DGL für $\lambda_{1,2} = \pm\alpha$

$\Rightarrow$ partikuläre Lösungen $C_1 e^{\alpha x}$, $C_2 e^{-\alpha x}$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$

2 Integrationskonstanten

(iv) Variation der Konstanten: für lineare, inhomogene DGL.

Bsp: $y'(x) = y(x) + x^2$

(a) $y'(x) = y(x)$ (homogen) $\Rightarrow y_{hom}(x) = c\, e^x$

(b) $c \to c(x)$: $c'(x)e^x + \cancel{c(x)e^x} = \cancel{c(x)e^x} + x^2$

$\Rightarrow c'(x) = x^2 e^{-x}$

$\Rightarrow \overset{\text{P.I.}}{\dots} \Rightarrow c(x) = -(x^2+2x+2)e^{-x} + d$

$\Rightarrow y(x) = \left[-(x^2+2x+2)e^{-x} + d\right] e^x = -(x^2+2x+2) + d e^x$

(v) Potenzreihenansatz: Ansatz: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad a_n \in \mathbb{C}$

Bestimme a_n, sodass DGL erfüllt ist für alle x
(im Definitionsbereich)

$\Rightarrow$ ggf. nur im Konvergenzbereich der Reihe

7.4 Lineare inhomogene DGLs

DGLs der Form: $L[y(x)] = b(x)$ $\Rightarrow$ $y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x)$

L: lineare Differenzialoperator; $L[y_{hom}(x)] = 0$; $L[y_p(x)] = b(x)$

Bsp: $\ddot{y}(t) + 2\gamma\,\dot{y}(t) + \omega_0^2\, y(t) = F(t)$

hier: $\gamma = 0$: angetriebener, harmonischer Oszillator

$F(t) = f_0 \cos(\Omega t)$

$\Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = f_0 \cos(\Omega t)$

(a) homogen: $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \Rightarrow y_{hom}(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)$

$= A \sin(\omega_0 t + \varphi)$

(b) partikuläre Lsg: Ansatz: $y_p(t) = \alpha \cos(\omega t)$

$\Rightarrow -\alpha\omega^2 \cos(\omega t) + \alpha\omega_0^2 \cos(\omega t) = f_0 \cos \Omega t$

erfüllt durch $\omega = \Omega$, $\alpha = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}$ (nur für $\omega_0 \neq \Omega$) keine Resonanz!

$\Rightarrow y_p(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t)$

$\Rightarrow y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{f_0}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t)$

Fall $\omega_0 = \Omega$? (b): $y_p(t) = \alpha t \sin(\omega_0 t)$

$\Rightarrow -\alpha t \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + 2\alpha\omega_0 \cos(\omega_0 t) + \alpha\omega_0^2 t \sin(\omega_0 t) = f_0 \cos(\omega_0 t)$

erfüllt für $\alpha = \frac{f_0}{2\omega_0}$

$\Rightarrow$ Für $\omega_0 = \Omega$: $y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \underbrace{\frac{f_0}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t)}_{\text{Amplitude wächst!}}$