Theoretische Physik Ia: Rechenmethoden der Mechanik

VL WS 2024/25, Dr. habil. Philipp Hövel
philipp.hoevel@uni-saarland.de, E2 6, Raum 4.03

VL*: Mi. 8-10 c.t. (8:30-10:00) E2 5, Hörsaal II / 0.02
Do. 12-14 c.t. (12:15-13:45) E2 5, Hörsaal I / 0.01 } 3h ⇒ 45h

UE: Mi. 14-16 E2 6, 1.06
Mi. 16-18 E2 6, 4.18
Do. 8-10 E2 6, 4.18
Fr. 10-12 E2 6, 4.18 } 2h ⇒ 30h

5h ⇒ 75h

*TUT: Teil eines VL-Slots (optionales Angebot)
+ offene Sprechstunde

Umfang: 7 ECTS (B.Sc. Physik & Quantum Engineering) ⇒ 210h : 135h
5+2 ECTS (B.Sc. Biophysik) ⇒ 150-210h : 75-135h
5 ECTS (Lehramt Physik) ⇒ 150h : 75h

Zeit außerhalb von Veranstaltungen

Note: unbenotet
Übungsaufgaben $\xrightarrow{\geq 50\%}$ Klausur $\xrightarrow{\geq 50\%^*}$ bestanden
12 Blätter
Mi → Mi
Start 23.10.

* Biophysik: bestanden ab 40%, ab 50% 2 ECTS dazu
Lehramt: — " —

Stil: austauschorientiert, anregend, inkludierend, ermunternd,
viele Hinweise rechts, links, oben, unten, vorne, hinten gebend

"Bergführer" & "Coach"

Hilfsmittel: - VL-Skript
- Glossar (individuell)
- Definitionen, Sätze ... formal

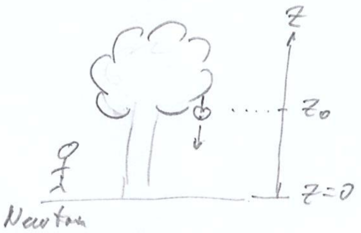
1. Eindimensionale Analysis

Übersicht

1. Eindimensionale Analysis
1.1 Einführung
1.2 Lineare Näherung einer Funktion (Ableitung)
1.3 Beispiel: Ableitung des Sinus
1.4 Ableitungsregeln
1.5 Wichtige Ableitungen
1.6. Taylor-Entwicklung
1.7 Eindimensionales Integral
1.8 Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung
1.9 Integrationsregeln
1.10 Beispiele und Tricks
1.11 Uneigentliche Integrale
1.12 Mittelwertsätze

1.1 Einführung

Bsp.: Bahn eines fallenden Apfels (wichtig: Bilder im Kopf <-> Physik Mathematik)

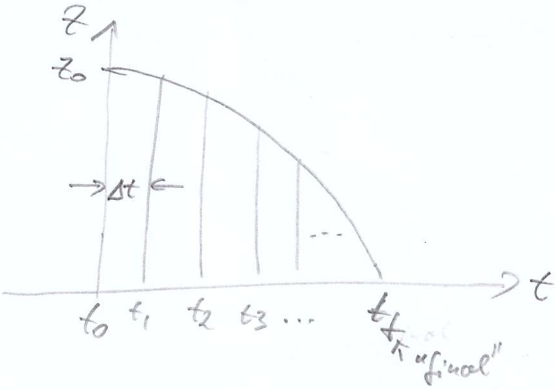


physikalisch relevante Größe:

z: Distanz zum Boden

Start bei Höhe/Distanz z_0 zur Zeit $t=t_0=0$

Beobachtung:



Messung zu diskreten Zeiten: $t_0, t_1, \dots, t_f$

Aufschlag ($z_f=0$) bei $t_f = N\Delta t$

mit Zeitschritt $\Delta t = t_n - t_{n-1}$, $n=1,\dots,N$

Im Limes (Grenzfall) $N \to \infty$ bekommen wir eine Funktion $z: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : t \mapsto z(t)$

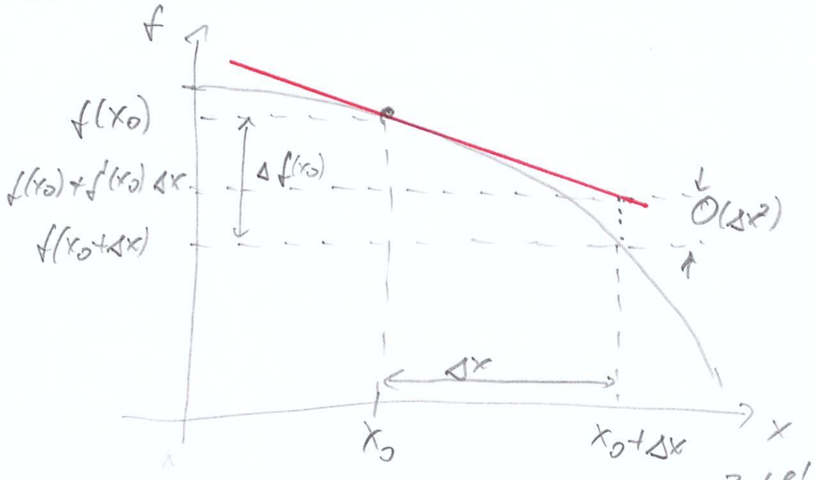
positive reelle Zahlen inkl. Null $\} \; t \in [0,\infty)$

Aus der Schule (Newton) wissen wir: $z(t) = z_0 - \frac{1}{2} g t^2$

$\Rightarrow$ der Apfel schlägt bei $z(t_f)=0$ auf: $t_f = \sqrt{\frac{2z_0}{g}}$

Bem.: die Funktion $z(t)$ wurde invertiert. Das geht weil $z(t)$ bijektiv (eindeutig) ist.

1.2 Lineare Näherung einer Funktion (Ableitung)



Ziel: Näherung von $f(x_0+\Delta x)$ bei bekanntem $f(x_0)$, so dass der Fehler von der Ordnung $O(\Delta x^2)$ ist.

Landau-Symbol „wächst höchstens wie Δx^2" (asymptotische obere Schranke)

$$\boxed{f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \overbrace{f'(x_0)}^{\text{Zahl!}}\Delta x + O(\Delta x^2)}$$

Weiter mit Definition $\Delta f(x_0) \underset{\text{„definiert als"}}{:=} f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ folgt:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + O(\Delta x^2)$$ (falls eine solche Funktion $f'(x)$ existiert)

Def.: 1) Die Funktion $f'(x)$ heißt **erste Ableitung** von $f(x)$. Man erhält sie aus dem **Differenzenquotienten**:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \underbrace{\left(-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{O(\Delta x^2)}{\Delta x}\right)}_{=0}$$

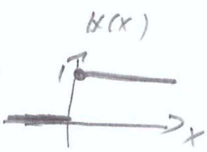
2) f heißt **differenzierbar** bei x_0, wenn $f'(x_0)$ existiert. (beidseitiger Grenzwert!)

1.VL

16.10

2.VL

Gegenbeispiel: **Heaviside-Stufenfunktion** $H(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x<0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$



$\Rightarrow$ H ist nicht differenzierbar bei $x_0 = 0$

Notationen in der Physik: (i) $f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$

bzw. $f'(x) = \frac{df}{dx}$

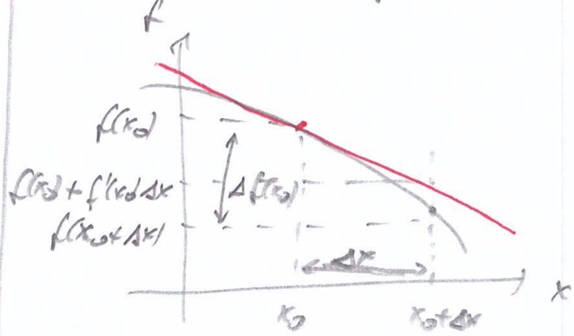
Ableitungsvariable

(ii) bei Ableitung nach der Zeit t schreibt man häufig: $f(t)$, $\dot{f}(t) = \frac{df}{dt}$

Bsp: $z(t) \Rightarrow \dot{z}(t) = \frac{dz}{dt}$

1.1 Introduction

1.2 Linear approximation of a function



idea: approximation of $f(x_0+\Delta x)$ for a given $f(x_0)$ such that the error is of order $O(\Delta x^2)$

$$\Rightarrow f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x + O(\Delta x^2)$$

Def.: A function $f: D \to \mathbb{R}$, defined on an open set D, is said to be **differentiable** at $x_0 \in D$ if the **derivative**

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ exist.}$$

1.2 Lineare Näherung (Fortsetzung)

Notation in der Physik: (i) $f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$

$$\text{bzw. } f'(x) = \frac{df}{dx}$$

(ii) Ableitung nach der Zeit t: $f(t) \Rightarrow \dot{f}(t) = \frac{df}{dt}$

$$\text{Bsp.: } \dot{z}(t) = \frac{dz}{dt}$$

• höhere Ableitungen:

n-te Ableitung: $\underbrace{\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}}_{n\text{-mal}} f(x) \underset{\text{identisch}}{\equiv} \frac{d^n f}{dx^n}(x) \equiv f^{(n)}(x)$

Bsp: Ort/Höhe/Distanz zum Boden des Apfels: $z(t)$

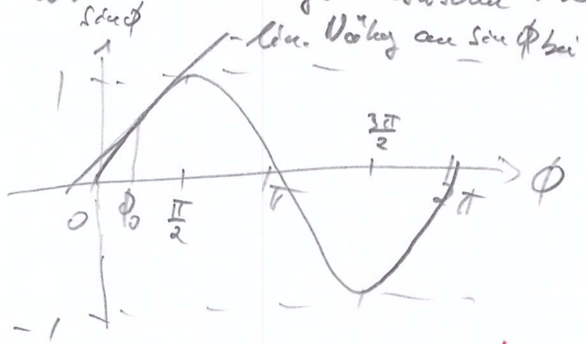
Geschwindigkeit: $v(t) = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$

Beschleunigung $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} (= -g)$

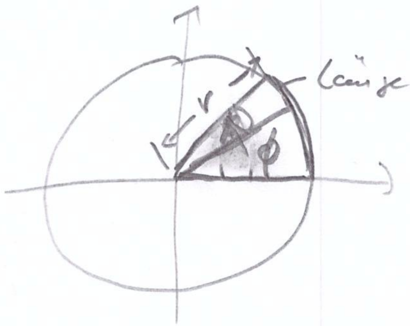
1.3 Beispiel: Ableitung des Sinus

Ziel: Zeigen wir mit rein geometrischen Überlegungen, dass $\frac{d}{d\phi}\sin\phi = \cos\phi$.

Erinnerung: 1)



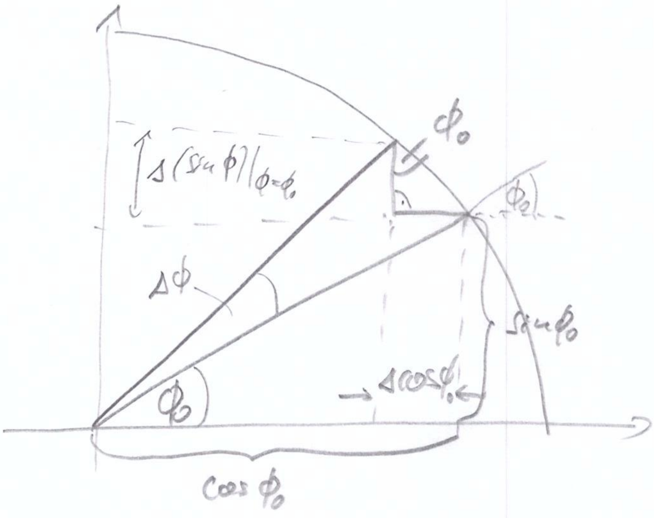
2) Bogenmaß



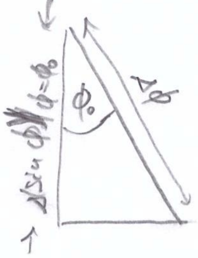
Länge des Bogens: $l = r\phi$ (häufig: Einheitskreis $r = 1$)

Frage: Wo steckt der $\sin\phi = f(\phi)$?

$\Delta(\sin\phi)|_{\phi=\phi_0}$: $\Delta\sin$ an der Stelle $\phi = \phi_0$



Zoom:



Änderung des sin φ

kleines Dreieck, so dass Bogen mit Länge $\Delta\phi$ fast gerade ist (exakt bei $\Delta\phi \to 0$)

Ablesen: $\cos\phi_0 = \frac{\Delta(\sin\phi)|_{\phi=\phi_0}}{\Delta\phi}$

$$\Rightarrow f'(\phi_0) = \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta\phi}\Big|_{\phi=\phi_0} = \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{\Delta(\sin\phi)}{\Delta\phi}\Big|_{\phi=\phi_0} = \cos\phi_0$$

1.4 Ableitungsregeln

Siehe Definitionen_TPIa WS24.pdf

Seien f, g, h differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

1. ***Linearität:*** Für $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
$$(\lambda f(x) + \mu g(x))' = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

Die Ableitung ist also ein linearer Operator

2. ***Produktregel:***
$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$$

3. ***Kettenregel:*** Für $h(x) = f(g(x))$ gilt:
$$h(x)' = f'(g(x))\, g'(x).$$

$$= \frac{df}{dy}\Big|_{y=g(x)} \cdot \frac{dg}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

4. ***Quotientenregel:***
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}.$$

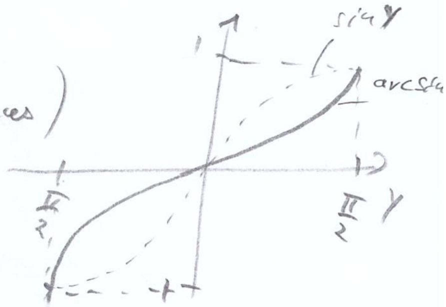
5. ***Ableitung einer inversen Funktion:*** Für eine invertierbare Funktion $f(x)$, d.h. $x = f^{-1}(y)$, gilt:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}} f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}\Big|_{x=f^{-1}(y)}}.$$

Bsp: (i) 3. Kettenregel: $f(x) = \sin^2(x^2) = f(g(x))$ mit $f(y) = y^2$, $g(x) = \sin(x^2)$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{2\sin(x^2)}_{\frac{df}{dy}}\; \underbrace{\frac{d}{dx}\sin(x^2)}_{\frac{dg}{dx}} = 2\sin(x^2)\, \underbrace{\cos(x^2)\; 2x}$$

(ii) 5. Ableitung einer inversen Funktion:

$f(x) = y = \sin x \;\Rightarrow\; x = \arcsin y$ (Arkussinus)



(Spiegelung von $\sin x = y$ an Diagonalen $x = y$)

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\arcsin y = \frac{1}{\frac{d\sin x}{dx}\Big|_{x=\arcsin y}}$$

$$= \frac{1}{\cos x\big|_{x=\arcsin y}}$$

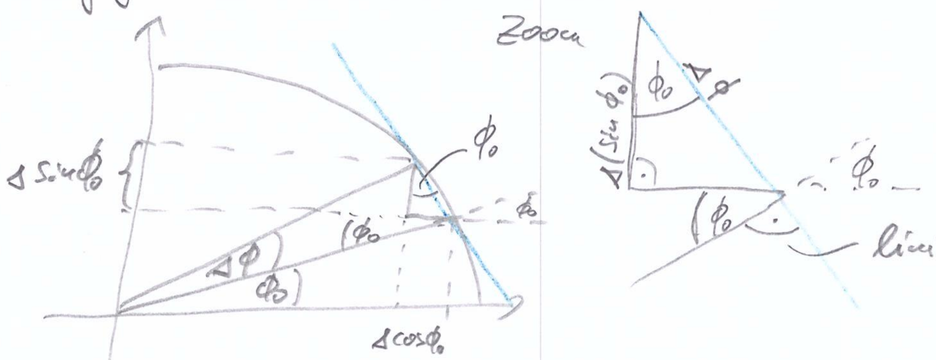
$$\underset{1=\sin^2 x+\cos^2 x}{\uparrow}\!\!= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}\,\Big|_{x=\arcsin y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

1.5 Wichtige Ableitungen

- $(\text{const})' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{Z}\,)$
- $(x^a)' = ax^{a-1} \quad (x > 0, \quad a \in \mathbb{R})$ $\rightarrow f(x) = \sqrt{x} = (x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = (\ln a)\, a^x \quad (a > 0)$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\quad x \neq (\frac{1}{2} + n)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ (Nullstellen von $\cos x$)
- $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- $(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$
- $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1)$
- $(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

1.3 Example: derivative of the sine function by geometric means



$$\frac{d}{d\phi}\sin\phi_0 = \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{\Delta(\sin\phi)\big|_{\phi=\phi_0}}{\Delta\phi} = \cos\phi_0$$

1.4. Rules of differentiation

(i) linearity $\quad (\lambda f(x)+\mu g(x))' = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$

(ii) product rule $\quad (f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

(iii) chain rule $\quad h(f(g(x))) = \left.\frac{df}{dy}\right|_{y=g(x)} \frac{dg}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$

(iv) quotient rule $\quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$

(v) derivative of an inverse function $\quad (f^{-1}(y))' = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(y)}}$

1.5 Important derivatives

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

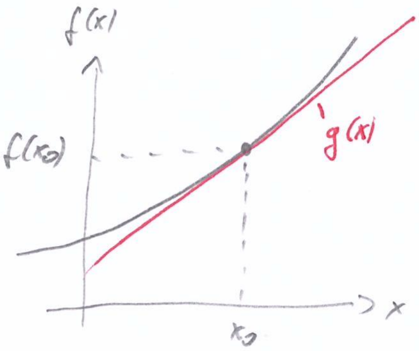
$$= \frac{\cos^2 + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

1.6 Taylor-Entwicklung

Ziel: Näherung einer Funktion durch ein Polynom

- lineare Näherung: $f(x) = \underbrace{f(\overset{\text{Entwicklungspunkt}}{x_0}) + f'(x_0)(x-x_0)}_{g(x)} + O((x-x_0)^2)$

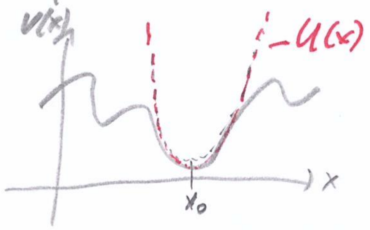


$\Rightarrow g(x_0) = f(x_0)$ und $g'(x_0) = f'(x_0)$

Bem.: Rechnung mit allgemeiner Funktion $f(x)$ oft komplizierter als mit linearer Näherung $g(x)$.

$\Rightarrow$ Linearisierung

- quadratische Näherung: Potenzial $V(x)$ und quadratische/„harmonische" Näherung $U(x)$ um x_0.



$$V(x) = \underbrace{V(x_0) + V'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2}_{U(x)} + O(|x-x_0|$$

$$\Rightarrow U(x_0) = V(x_0), \quad \underbrace{U'(x_0) = V'(x_0)}_{\text{gleiche Steigung}}, \quad \underbrace{U''(x_0) = V''(x_0)}_{\text{gleiche Krümmung}}$$

check: $U'(x) = V'(x_0) + V''(x_0)(x-x_0) \Rightarrow U'(x_0) = V'(x_0)$

$U''(x) = V''(x_0)$

(Vorbereitende) Definition:

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \overset{\text{Teilmenge}}{\subset} \mathbb{R}$ heißt (n mal) stetig differenzierbar, wenn f im Intervall D (n-mal) differenzierbar ist und $f^{(n)}(x)$ stetig ist.

(Schreibweise: $f \in C^n(D)$)

„continuously differentiable"

Bem.: - Ist f beliebig oft differenzierbar, so nennt man f eine $C^\infty(D)$-Funktion.

- In der Physik sind Funktionen in der Regel diffbar, Knicke, Sprünge... sind eher selten.

Satz von Taylor:

Jede Funktion $f \in C^{n+1}(D)$ auf einem offenen Intervall D lässt sich für $x, x_0 \in D$ auf folgende Weise nach Potenzen entwickeln:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}_{\text{Taylor-Polynom } n\text{-ter Ordnung}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Restglied}}}$$

also: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2$

$$+ \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x)$$

Restglied: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ mit ξ zwischen x und x_0

Beispiel: (i) Exponentialfunktion:

$f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ entwickelt um $x_0 = 0$:

Check: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ✓

$f^{(k)}(x) = e^x$ also $f^{(k)}(x_0) = 1$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + R_n(x)$$

Bem: $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, also: $e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$

($k!$ wächst schneller als x^k)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

(ii) Geometrische Reihe:

$f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$f''(x) = 2 \frac{1}{(1-x)^3}$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = k! \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$

$\Rightarrow f^{(k)}(x_0) = k!$

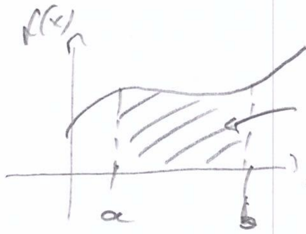
$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!(x-x_0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

aber nur im Konvergenzradius $|x| < 1$

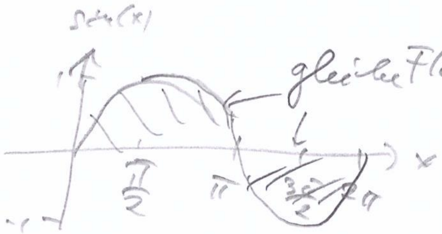
also: $x \in (-1, 1) =]-1, +1[$

1.7 Eindimensionales Integral

(i) Intuition: Fläche unter der Kurve



Frage: $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = ?$



(ii) Anwendung: Umkehrung der Ableitung

Bsp.: Ort $x(t)$ bei gegebener Geschwindigkeit $v(t)$ & Startpunkt $x_0 = x(t_0)$

Aus $\frac{dx}{dt} = v(t)$ folgt:

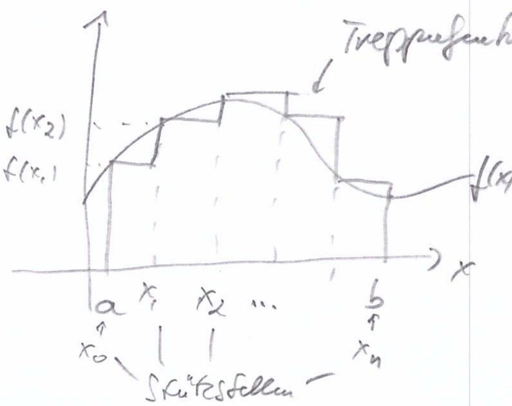
$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dx}{dt}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad x\Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt \Rightarrow x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$$

(iii) Formaler: Cauchy-Integral

Idee: Näherung einer Funktion als Treppenfunktion



Abstand der Stützstellen: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$\Rightarrow$ Stützstellen bei $x_i = a + i\Delta x,\ i = 0, \ldots n$

Check: $x_n = a + n\Delta x = a + n\frac{b-a}{n} = b$ ✓

Fläche unter der Treppenfunktion: $F_n = \int_a^b t_n(x)\,dx = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}}_{\text{Summe der Rechtecke}} \underbrace{f(x_i)\,\Delta x}_{\text{Fläche des } i\text{-ten Rechtecks}}$

1.6 Taylor expansion

idea: approximate $f(x)$ by a polynomial involving its derivatives

Taylor's theorem: Any $f \in C^{n+1}(D)$ defined on an open set $D \subset \mathbb{R}$ can be expressed by

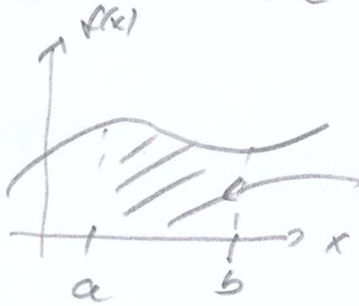
$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}_{\text{Taylor polynomial}} + R_n(x)$$

with $x, x_0 \in D$ and the remainder term $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

between x and x_0

1.7 1D integrals

(i) area under the curve/function



$$F = \int_a^b f(x)\,dx$$

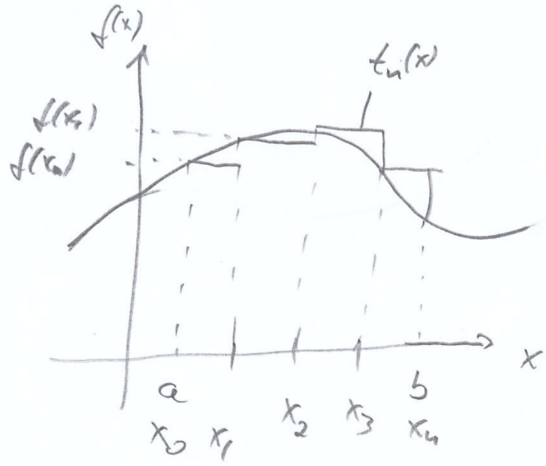
(ii) application: antiderivative

$$x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds = x(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{x} = v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

$$\int dt$$

(iii) Cauchy integral

idea: approximation of F by step functions



spacing of meshpoints: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$F_n = \int_a^b t_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x$$

Integral:

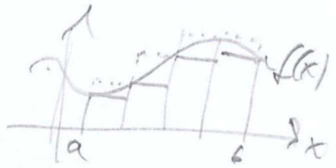
$$F = \lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$$

• Das **Integral** über $f(x)$ ist definiert als

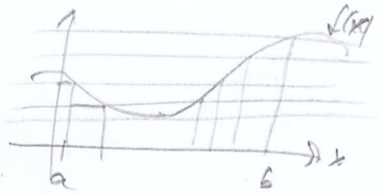
$$F = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$$

immer feinere Stufen

Bem: Alternative Zugänge: - Riemann-Integral



- Lebesgue-Integral



1.8 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Satz: (i) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist für jedes $x_0 \in I$ (Intervall)

die **Integralfunktion** $F: I \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\tilde{x})\,d\tilde{x}$ (Fläche unter f im $[x, x_0]$)

differenzierbar und eine **Stammfunktion** von f.

(D.h.: für alle $x \in I$ gilt: $F'(x) = f(x)$)

(ii) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf $[a,b]$ mit Stammfunktion

$F: [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Bem: Stammfunktionen nennt man auch **unbestimmte Integrale**

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

⇒ Stammfunktionen unterscheiden sich um eine Konstante (fällt bei Ableitung weg)

ohne Grenzen

eine mögliche Stammfunktion

Integrationskonstante

1.9 Integrationsregeln

Integrationsregeln:

1. **gleiche Integrationsgrenzen:**

$$\int_a^a f(x)\mathrm{dx} = 0.$$

2. **umgedrehte Integrationsgrenzen:**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = -\int_b^a f(x)\mathrm{dx}.$$

3. **Additivität bzgl. der Integrationsgrenzen:**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} + \int_b^c f(x)\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\mathrm{dx}.$$

4. **Linearität:** Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{dx} = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{dx} + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{dx}.$$

5. **Partielle Integration:**

$$\int_a^b (f'(x)\, g(x))\, \mathrm{dx} = f(x)\, g(x)|_a^b - \int_a^b (f(x)\, g'(x))\, \mathrm{dx}.$$

6. **Substitution:**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}}\mathrm{dt} \quad \text{oder} \quad \int_a^b f(u(x))\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}\mathrm{dx} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\mathrm{dt}.$$

1.–3.: schnell zu zeigen über Definition der Stammfunktion

4.: Linearität der Treppenfunktion/Summen

5.: Produktregel

6.: Kettenregel

1) $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -\left(F(a) - F(b)\right) = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \cancel{F(b)} - F(a) + F(c) - \cancel{F(b)} = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,dx$

4) folgt aus der Linearität von Summen über Treppenfunktionen

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda f(x_i) + \mu g(x_i))\,\Delta x\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\lambda \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x + \mu \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)\Delta x\right]$$

$$= \lambda \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x + \mu \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)\Delta x$$

$$= \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

5) folgt aus Produktregel der Ableitg:

$$(fg)' = f'g + g'f$$

$$\Rightarrow \int_a^b (f(x)g(x))' dx = \int_a^b \left[f'(x) g(x) + f(x) g'(x) \right] dx$$

$$\Rightarrow f(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Bem: wichtig für Elektrodynamik & Quantenmechanik

in vielen zentralen Herleitgen

- für Berechg von Integralen

Bsp

$$\int \ln x\, dx = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_{g}\, dx = \underbrace{x}_{f} \underbrace{\ln x}_{g} - \int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} dx = x \ln x - x$$

6) Verkettg von F mit u:

$$\left(F(u(x))\right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(u(x)) \frac{du}{dx} dx = \int_a^b \left(F(u(x))\right)' dx$$

$$= F(u(b)) - F(u(a))$$

$$= \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\, dt$$

Bsp.: $$\int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\sin(x^2)}_{f(\underset{\substack{\uparrow \\ x^2}}{u(x)})} \underbrace{2x}_{u'(x)} dx = \int_{u(x_0)}^{u(x_1)} \sin(u)\, du$$

Lesen als: - Wechsel der Integrationsvariable von u nach x entspricht

- Koordinatenwechsel: f als Funktion von x statt u.

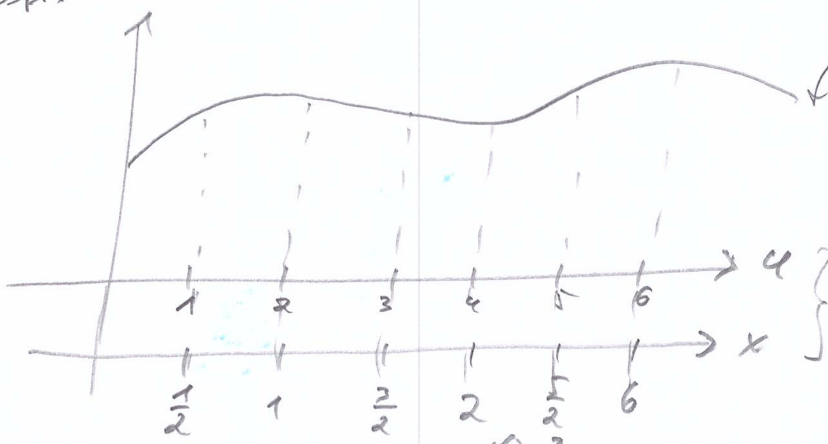
$$\int_{u_0}^{u_1} f(u)\,du = \int_{x_0=x(u_0)}^{x_1=x(u_1)} f(u(x))\,\frac{du}{dx}\,dx$$

← neue Integrationsvariable

Schrittweite in u pro Schrittweite in x

Grenzen durch x statt u ausgedrückt

Bsp.:



$f(x)$ oder $f(u(x)) =: \tilde{f}(x)$

Hier: $u = 2x \Rightarrow x(u) = \frac{1}{2}u$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2$

$$\int_1^6 f(u)\,du = \int_{\frac{1}{2}}^{3} f(u(x))\cdot 2\,dx$$

$x(6) = 3$

$x(1) = \frac{1}{2}$

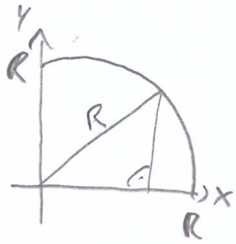
Korrektur für kürzeres Integrationsintervall

Beispiele: Inverse Operation zur Ableitung

↳ Liste mit Funktionen, Ableitungen und Integralen

1.10 Berechnen von Integralen: Beispiel & Tricks

(i) Fläche eines Viertelkreises : $\frac{\pi R^2}{4}$



$$F = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx \quad \leftarrow \text{Pythagoras}$$

$$= R \int_0^R \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}\, dx$$

$u = \frac{x}{R} \Rightarrow u' = \frac{1}{R} = \frac{du}{dx}$

$= dx = R dx$

$$= R \int_{u(0)}^{u(R)} \sqrt{1-u^2}\, R\, du$$

$$= R^2 \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\, du$$

$u = \cos t \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\sin t$

$\Rightarrow t = \arccos u$

$t(0) = \frac{\pi}{2}$

$t(1) = 0$

$$= R^2 \int_{t(0)}^{t(1)} \underbrace{\sqrt{1-\cos^2 t}}_{\sin(t)}\, (-\sin t)\, dt$$

$$= R^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin^2 t\, dt$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin t}_{f'}\, \underbrace{\sin t}_{g}\, dt$$

Nebenrechnung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = \underbrace{-\cos t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{-\cos t}_{f}\, \underbrace{\cos t}_{g'}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow F = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = R^2 \frac{\pi}{4} \quad \checkmark$$

Check: $\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$

(ii) Ableiten nach Parameter

Idee: Vertauschen von Ableitung und Integration
(meistens OK, aber Vorsicht bei parameterabhängigen Grenzen!)

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{d\alpha}F(\alpha) = \int_a^b \frac{d f(x,\alpha)}{d\alpha}\,dx.$$

Bsp.: $F = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

Beobachtung: n-mal partiell integrieren arbeitet x^n weg.
↳ langwierig!!!

↳ Idee: $\tilde{F}(\alpha) = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\,dx \quad , \quad \tilde{F}(\alpha)\big|_{\alpha=1} = F$

$$= \int_0^\infty (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} \underbrace{\left.\frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x}\right|_0^\infty}_{=\frac{1}{\alpha}}$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} (\alpha)^{-1}$$

$$= \underbrace{(-1)^n (-1)(-2)\ldots(-n)}_{= n!} \alpha^{-n+1}$$

τ^{-n+1}

$$= \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \tilde{F}(1) = n! = F$$

Bem.: Verallgemeinerung der Fakultät möglich: Gamma-Funktion

$$\Gamma(z) := \int^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt \quad , \quad \Gamma(n+1) = n!$$

1.8 Fundamental theorem of calculus

(i) Let f be a continuous real-valued function on a closed interval I.

Then, for all $x_0 \in I$, the function $F: I \to \mathbb{R}$ defined as $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\tilde{x}) d\tilde{x}$

is differentiable with $F'(x) = f(x)$.

(ii) Let $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function on $[a,b]$ and F an antiderivative in (a,b). Then, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

- antiderivative not unique (differ by a constant)
- $F(x) = \int f(x) dx$ indefinite integral

1.9 Rules of integration

(i) same boundaries / limits of integration: $\int_a^a f(x) dx = 0$

(ii) swapping boundaries: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x) dx$

(iii) additivity of boundaries: $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

(iv) linearity: $$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

(v) partial integration: $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$

(vi) substitution:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t)) \frac{du}{dt} dt, \quad \int_a^b f(u(x)) \frac{du}{dx} dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt$$

1.10 Examples & tricks

1.11 Uneigentliche Integrale

Integration | von Funktionen mit Singularitäten
| mit unbeschränktem Integrationsbereich

Fazit: Manchmal geht's, manchmal nicht!?

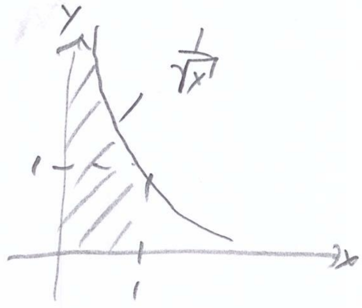
Bsp: (i) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx := \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

divergiert für $x \to 0$

$= \lim_{a\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_a^1$

$= \lim_{a\to 0} \left(2 - 2\sqrt{a}\right)$

$= 2$

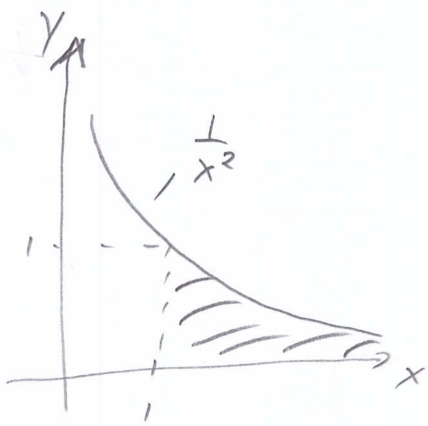


(ii) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx := \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx$

$= \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^a$

$= \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{1}\right)$

$= 1$

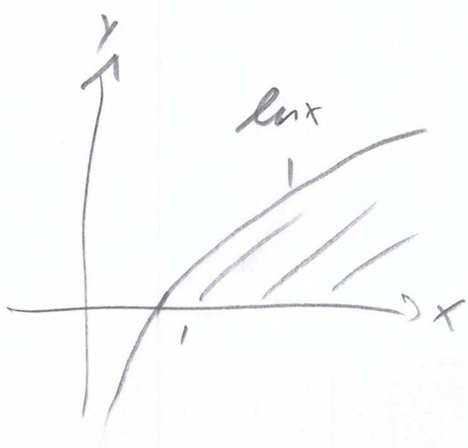


(ii) $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x}\,dx$

$= \lim_{a\to\infty} \ln x\Big|_1^a$

$= \lim_{a\to\infty} \left(\ln a - \underbrace{\ln 1}_{0}\right)$

$= \lim_{a\to\infty} \ln a$ existiert nicht / divergent

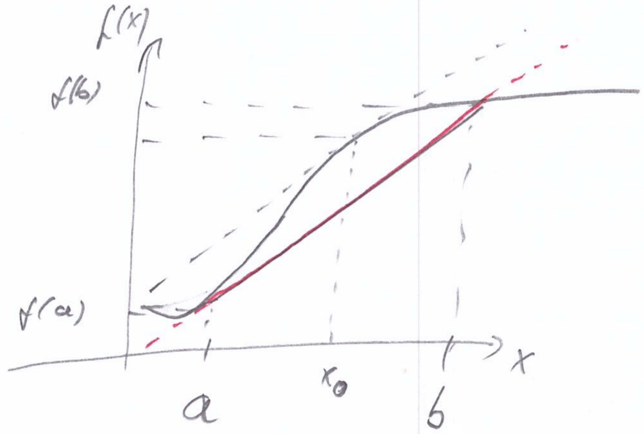


1.12 Mittelwertsätze

(i) Differenzialrechnung:

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$ und diffbar in $]a,b[$.

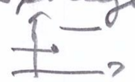
Dann gilt: $\exists\, x_0 \in\,]a,b[\; : f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Durchschnittliche Steigung liegt bei x_0 an.

↳ Geschwindigkeitskontrolle durch Intervallmessung

- mehrere Stellen möglich
- klappt nicht bei Knicken & Sprüngen



(ii) Integralrechnung:

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\exists\, x_0 \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)\,(b-a)$$

$f(x_0)$ bestimmt die Höhe des Rechtecks der Breite $b-a$

- klappt nicht bei Sprüngen

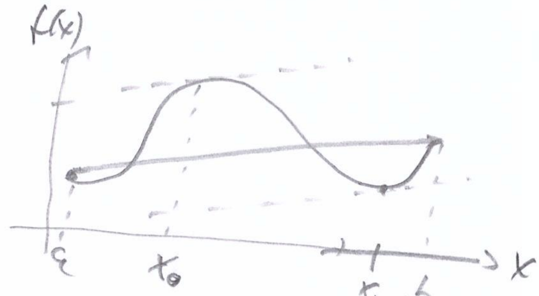
1.11 Improper integrals

- integration of functions with singularities
  or unbounded limits
- sometimes, it works, but sometimes, it does not

1.12 Mean value theorems

- Differentiation: Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function on the closed interval $[a,b]$ and differentiable on (a,b).
  Then, there exists some $x_0 \in (a,b)$ such that

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} .$$



$$f'(x_1) = f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- integration: Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function.
  Then, there exists a $x_0 \in [a,b]$ such that

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a) .$$

↳ equal area rule (Maxwell construction)

2. Mehrdimensionale Analysis 18

2. Mehrdimensionale Analysis (Differenzial- und Integralrechnung im R^n)
2.1 Partielle Ableitungen
2.2 Totales Differenzial
2.3 Totales Differenzial und Ableitungsregeln
2.4 Gradient
2.5 Mehrdimensionale Taylor-Entwicklung
2.6 Extremwerte/Extermstellen
2.7 Extremum unter Nebenbedingungen (Methode der Lagrange-Multiplikatoren)
2.8 Integralrechnung skalarer Funktionen im R^n
2.9 Variablen-/Koordinatentransformation
2.9.1 Polarkoordinaten im R^2
2.9.2 Kugelkoordinaten im R^3
2.9.3 Zylinderkoordinaten im R^3

Grundidee: Funktionen mehrerer Variablen

- Höhe eines Gebirges $h = h(x,y)$
- Temperatur im Raum $T = T(x,y,z)$
- zeitabhängige Potenziale $V = V(t,x,y,z)$
- thermodynamische Zustandsgleichungen: $f(p,V,T) = 0$

etwa: $pV = nRT$ (ideales Gas)

Bem: hier (Kap 2) nur skalare Funktionen. Für vektorielle Funktionen s. Kap. 4 Vektoranalysis

2.1 Partielle Ableitung

Def: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$. Dann heißt die Ableitung nach einer Variablen (bei Festhalten aller anderen) partielle Ableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots x_n)}{\Delta x_i}$$

Bem.: • "∂" : "de", "del", Ableitungskringel ...

• $n=2$, $f(x,y)$: Notation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \equiv \partial_x f(x,y) \equiv f_x(x,y) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \equiv \partial_y f(x,y) \equiv f_y(x,y) := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Bsp.: (i) $f(x,y) = x^2 + x y^3$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^3 \qquad \text{(y als Konstante behandelt!)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 \qquad \text{(x ——— " ———)}$$

(ii) höhere Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} f = f_{xx} = 2, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f \equiv f_{xy} = 3y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f \equiv \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f \equiv f_{yx} = 3y^2, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} f \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} f \equiv f_{yy} = 6xy$$

Satz von Schwarz: Für stetig differenzierbare Funktionen ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen egal:

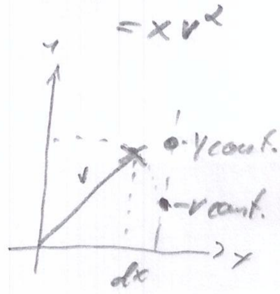
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y).$$

Bem: • $\partial_x \partial_y = \partial_y \partial_x$: symmetrischer Operator

• ggf. festgehaltene Koordinaten explizit angeben: $f(x,y) = x(x^2+y^2) = x r^2$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 3x^2 + y^2 \neq \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_r = r^2 = x^2 + y^2$$

$\uparrow$ const. $\qquad$ $\uparrow$ const (etwa Nebenbeding) (→ 2.7)



2.2 Das totale Differenzial

Idee: Änderung einer Funktion $f(x,y)$ $(f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ bei gleichzeitigen kleinen Änderungen von x und y um Δx bzw. Δy:

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) \overbrace{- f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y)}^{=0} - f(x,y)$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}} \Delta x + \underbrace{\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}} \Delta y$$

$$\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x, \underbrace{y+\Delta y}) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \Delta y$$

$\to y$ für Δy infinitesimal

Für infinitesimale $\Delta x, \Delta y$ $(\Delta x \to dx, \Delta y \to dy)$ gilt:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}$$

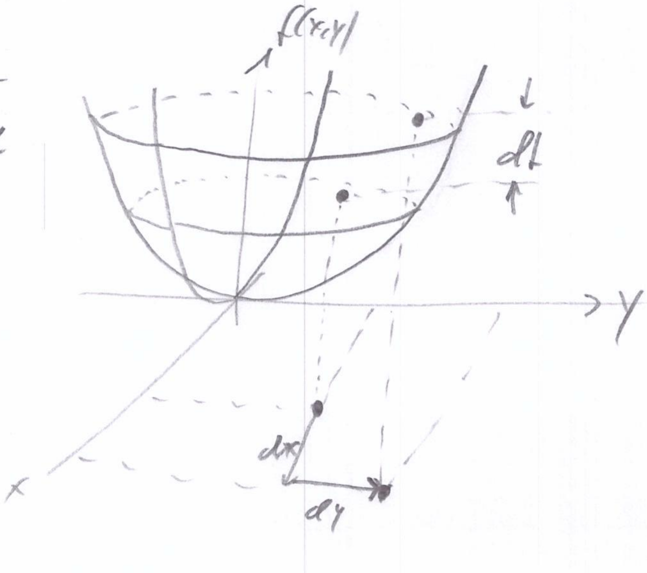
Def: Das totale Differenzial von $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch:

$$df := \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Bsp.: Totales Differenzial von $f(x,y) = x^2 + y^2$:

$$df(x,y) = 2x\,dx + 2y\,dy$$

Rotations-paraboloid



2.3 Totales Differenzial & Ableitungsregeln

- mehrdimensionale Kettenregel für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = f(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i = \overset{\text{i. Koordinate}}{x_i}(\overset{\text{Zeit}}{t})$:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad \text{mit } dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} dt \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}}$$

Bem: $n = 1$ ✓ siehe 1.4. Ableitungsregeln $h(x)' \overset{h(g(x))}{=} \left.\frac{dh}{dy}\right|_{y=g(x)} \frac{dg}{dx} = \frac{dh}{dg} \frac{dg}{dx}$

Bsp: Schwerpunkt von n Massen m_i an den Orten $x_i(t)$ mit Gesamtmasse

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i : \quad R(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \, x_i(t)$$

Massen m_i mit x_i gewichtet

Frage: Geschwindigkeit des Schwerpunkts:

(i) Linearität: $\frac{dR(t)}{dt} = \frac{d}{dt} M^{-1} \sum_{i=1}^{n} m_i \, x_i(t)$

$$= M^{-1} \sum_{i=1}^{n} m_i \, \dot{x}_i(t) \quad \text{mit } m_i \text{ gewichteter Mittelwert}$$

(ii) Kettenregel: $\frac{d}{dt} R(x(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial x_i} \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial t}}_{= \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}}$ $\quad x_i$ hängt nur von t ab

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{n} m_j x_j \quad \text{(Achtung: Summationsindex hier } j\text{)}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{n} m_j \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{= \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } j = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}}$$

nur $j = i$ bleibt — Kronecker-Delta

$$= \frac{1}{M} m_i$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M} \dot{x}_i$$

2. Multidimensional analysis

2.1. Partial derivatives

Let $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ be a function on $\mathbb{R}^n$ (or an open subset $\Omega \subset$ ...

Then, the partial derivative of f with respect to the i-th variable is defined as

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

notation $\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \partial_{x_i} f \equiv f_{x_i} \equiv D_{x_i} f$

Schwarz's theorem: For $f: \Omega \to \mathbb{R}$ defined on $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, if $\underline{p} \in \Omega$
(Clairaut's)

and f has continuous second partial derivatives on a neighbourhood of $\underline{p}$,

then
$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\underline{p}) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(\underline{p}) \quad \forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}$$

2.2 Total differential

The sum of all partial differentials w.r.t. all independent variables $x_1, \dots, x_n$ is called total differential:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

2.3 Total differentiation and rules of differentiation

- chain rule: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = f(x_1, \dots, x_n)$ with $x_i = x_i(t)$.

  Then: $$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

• Totale vs. partielle Zeitableitung:

Mechanik: oft implizierte & explizierte Zeitableitungen:

$$f = f(x(t),\ y(t),\ t)$$

Bsp.: $f = x(t)^2 + y(t)^2 + \alpha t$

↳ partielle Ableitung: $\frac{\partial f}{\partial t} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{x,y\ \text{const}} = \alpha$

↳ totale zeitliche Ableitung: tatsächliche/im Experiment beobachtete Änderung von f:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

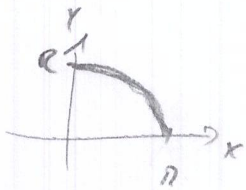
$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = 2x\,\dot{x} + 2y\,\dot{y} + \alpha$$

• implizierte Differentiation:

Idee: Zusammenhang von x und y nur als $f(x,y)=0$, aber nicht $y=y(x)$

Frage: $\frac{dy}{dx} = ?$

↳ Bsp.: (i) Kreis: $f(x,y) = R^2 - x^2 - y^2 = 0$, etwa $x,y \geq 0$



↳ $df = -2x\,dx - 2y\,dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

↳ check $(R,0)$, $(0,R)$

(ii) Ableitung von $y = x^x$, $x>0$:

$\ln y = \ln x^x \Rightarrow f(x,y) = \ln y - x \ln x = 0$

$\Rightarrow df = \frac{1}{y}dy - \left(\ln x + x\frac{1}{x}\right)dx = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$

$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x$

Bem: $\lim_{x\to 0} x^x = 1$ z.B. mit Regel von l'Hopital

$$\lim_{x\to 0} x^x = e^{\ln \lim_{x\to 0} x^x} = e^{\lim_{x\to 0} \ln x^x} = e^{\lim_{x\to 0} x \ln x} = e^0 = 1$$

2.4 Der Gradient

Für eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lautet das totale Differenzial

bei $\underset{\text{Vektor}}{\underline{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$: $df(\underline{a}) = \underbrace{\partial_{x_1}}_{\equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}} f(\underline{a})\, dx_1 + \dots + \underbrace{\partial_{x_n} f(\underline{a})}_{\partial_{x_n} f(\underline{x})\big|_{\underline{x}=\underline{a}}} dx_n$

Alternative Schreibweise mit Vektoren: $d\underline{x} \equiv \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$

Wir definieren den Gradienten von f als

$$\operatorname{grad} f(\underline{a}) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\underline{a}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\underline{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} f(\underline{a}) .$$

$$\Rightarrow df(\underline{a}) = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \overset{\text{Skalarprodukt}}{\cdot} d\underline{x} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\underline{a}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\underline{a}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f(\underline{a})\, dx_i$$

Merke: grad f liefert durch Skalarprodukt mit $d\underline{x}$ die Änderung von f unter einer infinitesimalen Verschiebung $d\underline{x}$

Bem.: übliche Schreibweise ist $\underline{\nabla} f(\underline{a}) \equiv \operatorname{grad} f(\underline{a})$ mit dem

Nabla-Operator $\underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} \Rightarrow df(\underline{a}) = \underline{\nabla} f(\underline{a}) \cdot d\underline{x}$

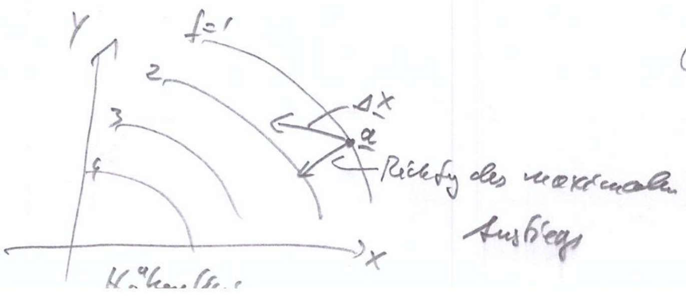
- $\underline{\nabla} f(\underline{a})$ zeigt die Richtung des maximalen Anstiegs von f bei $\underline{a}$:

$$\Delta f = \underline{\nabla} f \cdot \Delta \underline{x} = |\underline{\nabla} f|\, |\Delta \underline{x}| \cos \underset{}{\overset{\text{Winkel zwischen } \Delta\underline{x} \text{ und } \underline{\nabla} f(\underline{a})}{\theta}}$$

(Kap. 3.3 Skalarprodukt)

↳ bei $\theta = 0$ ($\Delta \underline{x} \parallel \underline{\nabla} f(\underline{a})$) ist $\cos \theta = 1$

$\Rightarrow \Delta f$ am größten



2.4 Gradient

The gradient of a function $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ at $\underline{a} \in \Omega$ is defined as

$$\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\underline{a}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\underline{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} f(\underline{a})$$

- Using vector notation, the total differential can be rewritten as

$$df(\underline{a}) = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{scalar} \\ \text{product}}}{\cdot} d\underline{x} \quad \text{with } d\underline{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\underline{a}) \cdot dx_i$$

- notation: $\operatorname{grad} f(\underline{a}) \equiv \underline{\nabla} f(\underline{a})$ with the Nabla operator $\underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix}$

  $\hookrightarrow df(\underline{a}) = \underline{\nabla} f(\underline{a}) \cdot d\underline{x}$

- geometric intuition: (i) $\underline{\nabla} f(\underline{a})$ points in the direction of steepest slope of f at $\underline{a}$.

  (ii) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{change of } f}}{\Delta f} = \underline{\nabla} f \cdot \Delta \underline{x} = |\underline{\nabla} f| \cdot |\Delta \underline{x}| \cos \theta$ ← angle between $\underline{\nabla} f$ and $\Delta \underline{x}$

- viele Anwendungen:
  - ↳ Physik: $\underline{E} = -\underline{\nabla} V$ ($\underline{E}$: E-Feld, V: elektrostatisches Potenzial)
  - ↳ Physik: Konservative Kräfte: $\underline{F} = -\underline{\nabla} V$
  - ↳ Optimierung (gradient descent)

2.5 Mehrdimensionale Taylor-Entwicklung

Erinnerung: Taylor-Reihe für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \underbrace{(x-x_0)}_{}^k$
(vgl. 1.6)

Δx: Abstand vom Entwicklungspunkt x_0

$$\left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\Delta x \frac{d}{dx}\right)^k f(x_0) \right)$$

Verallgemeinerung auf $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \Delta\underline{x} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$$

$$f(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k}_{(\Delta\underline{x} \cdot \underline{\nabla})^k} f(\underline{x}_0)$$

"Skalarprodukt"

Bsp.: 0-te Ordnung: $k=0$: $P_0(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$

1. Ordnung: $k=1$: $P_1(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\partial_{x_i} f(\underline{x}_0)\right) \Delta x_i$

2. Ordnung: $k=2$: Nebenrechnung: $\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right) = (a_1+a_2)(a_1+a_2)$

$$= a_1 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_2 a_2$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_i a_j = \sum_{i,j=1}^{2} a_i a_j$$

Doppelsumme

Damit: $P_2(\underline{x}) = \frac{1}{2!} \left(\sum_{i=1}^n \Delta x_i \, \partial_{x_i} \right)^2 f(\underline{x}_0)$

$$= \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \left(\partial_{x_i} \partial_{x_j} f(\underline{x}_0) \right) \Delta x_i \Delta x_j$$

$$\Rightarrow f(\underline{x}) = P_0(\underline{x}) + P_1(\underline{x}) + P_2(\underline{x}) + \mathcal{O}(|\Delta \underline{x}|^3)$$

$$= f(\underline{x}_0) + \sum_{i=1}^n \left(\partial_{x_i} f(\underline{x}_0) \right) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\partial_{x_i} \partial_{x_j} f(\underline{x}_0) \right) \Delta x_i \Delta x_j + \mathcal{O}(|\Delta \underline{x}|^3)$$

Bem: Kurzschreibweise:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + (\nabla f(\underline{x}_0)) \cdot \Delta \underline{x} + \frac{1}{2} \Delta \underline{x}^{\overset{\text{transponiert}}{T}} \underline{\underline{H}}(\underline{x}_0) \Delta \underline{x} + \mathcal{O}(|\Delta \underline{x}|^3)$$

mit der **Hesse-Matrix**

$$\underline{\underline{H}}(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \partial_{x_1} f(\underline{x}_0) & \cdots & \partial_{x_1 x_n} f(\underline{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_n} \partial_{x_1} f(\underline{x}_0) & \cdots & \partial_{x_n} \partial_{x_n} f(\underline{x}_0) \end{pmatrix}$$

Bsp: • Taylorentwicklung für $n=2$: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \partial_x f(\underline{x}_0) \Delta x + \partial_y f(\underline{x}_0) \Delta y$$

$$+ \frac{1}{2} \partial_x \partial_x f(\underline{x}_0) \Delta x^2 + \frac{1}{2} \partial_{yy} f(\underline{x}_0) \Delta y^2$$

$$+ \frac{1}{2} \overset{\text{S. v. Schwarz}}{2} \partial_x \partial_y f(\underline{x}_0) \Delta x \Delta y + \mathcal{O}(|\Delta \underline{x}|^3)$$

$$= f(\underline{x}_0) + \begin{pmatrix} \partial_x f(\underline{x}_0) \\ \partial_y f(\underline{x}_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\Delta x \;\; \Delta y) \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x f(\underline{x}_0) & \partial_x \partial_y f(\underline{x}_0) \\ \partial_y \partial_x f(\underline{x}_0) & \partial_y \partial_y f(\underline{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$+ \mathcal{O}(|\Delta \underline{x}|^3)$$

2.6 Extremwerte /-Stellen

- Erinnerung: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$: $f'(a)=0$ notwendige Bedingung für ein Extremum bei a

  ↳ $f''(a) > 0$: positive Krümmung ⇒ Minimum

  $f''(a) < 0$: negative Krümmung ⇒ Maximum

  $f''(a) = 0$: Maximum, Minimum oder Sattelpunkt

  (z.B.: $f(x) = x^4$ bei $a=0$)

- $f'(a)=0$ ⇒ a ist ein stationärer Punkt (Fixpunkt) $\dot{x} = f(x)$

- Verallgemeinerung auf $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$

  ↳ notwendige Bedingung: $df = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{a})\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a})\,dy = 0$ für beliebige dx, dy.

  $$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{a}) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a}) = 0$$

Art des stationären Punkts hängt von der Krümmung ab: (Eigenwerte Kap. 6)

(i) Maximum : $\partial_x^2 f(\underline{a}) < 0$, $\partial_y^2 f(\underline{a}) < 0$, $D := (\partial_x^2 f)(\partial_y^2 f) - (\partial_x \partial_y f)^2 > 0$

(ii) Minimum : $\partial_x^2 f(\underline{a}) > 0$, $\partial_y^2 f(\underline{a}) > 0$, $D > 0$

(iii) Sattelpunkt: $D < 0$

(iv) $D = 0$: höhere Ordnungen zu untersuchen

Bsp.: $f(x,y) = xy + x^2 + y^2 - 6y$

↳ notwendig: $\left.\begin{aligned} \partial_x f &= y + 2x = 0 \\ \partial_y f &= x + 2y - 6 = 0 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} x &= -2 \\ y &= 4 \end{aligned}$

2. Ableitungen: $\left.\begin{aligned} \partial_x^2 f &= 2 && > 0 \\ \partial_y^2 f &= 2 && > 0 \\ \partial_x \partial_y f &= 1 && \Rightarrow D > 0 \end{aligned}\right\}$ Minimum

• Verallgemeinerung auf $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

↳ $df(\underline{a}) = 0 \quad \forall\, dx_1, \dots, dx_n \Rightarrow \partial_{x_1} f = 0 = \partial_{x_2} f = \dots = \partial_{x_n} f$

oder kompakt: $\underline{\nabla} f(\underline{a}) = 0$ ← Nullvektor

↳ Art des stationären Punktes über Eigenwerte der Hesse-Matrix

↳ alle Eigenwerte $> 0 \Rightarrow$ Minimum

↳ alle Eigenwerte $< 0 \Rightarrow$ Maximum

2.7 Extremum unter Nebenbedingungen / Methode der Lagrange-Multiplikatoren

hier: $n=2$

Idee: Extrema von $f(x,y)$ unter einer Nebenbedingung $g(x,y) = 0$

Bsp.: Maximum von $f(x,y) = -(x^2+y^2)$ unter Nebenbedingung $y = x + c$

$\Rightarrow g(x,y) = y - x - c = 0$

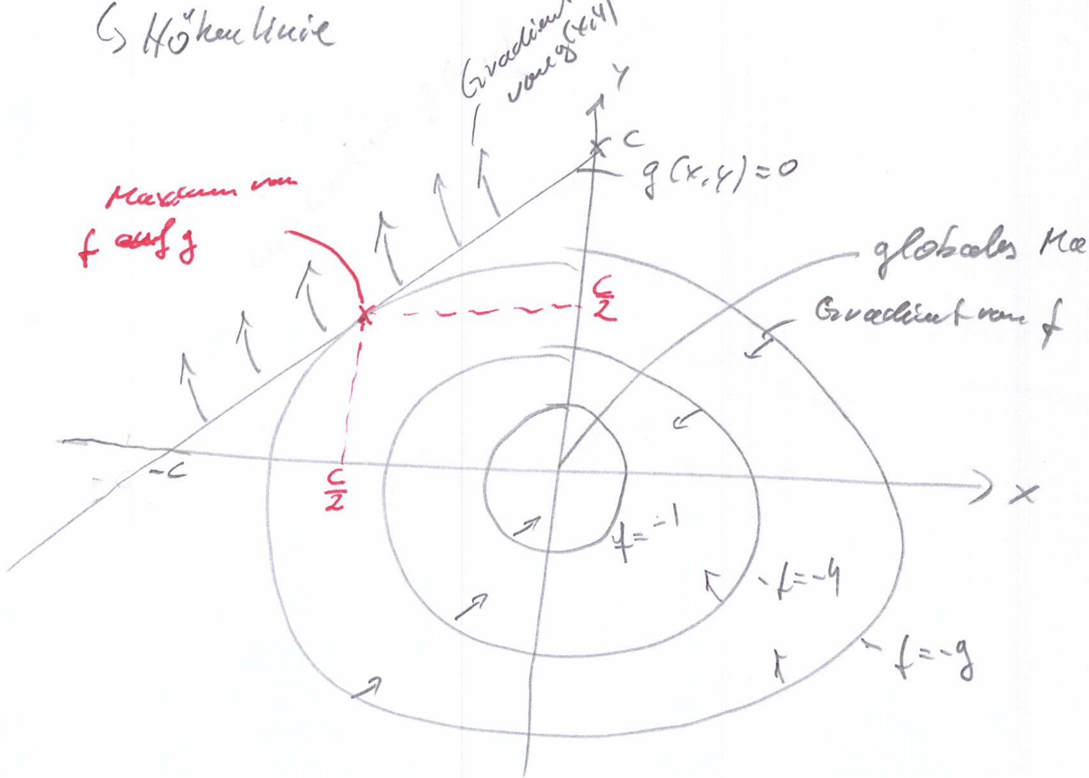
nach unten geöffneter Rotationsparaboloid

↳ s. 22 (VL6)

$\partial_x g = -1$

$\partial_y g = 1$

↳ Höhenlinie



$\partial_x^2 f = -2 < 0$

$\partial_y^2 f = -2 < 0$

$D = 4 > 0$

↳ Gradienten stehen senkrecht auf Höhenlinien.

↳ Extremum mit Nebenbedingungen, wo Gradient von f und g parallel sind

$\Rightarrow \underline{\nabla} f(x,y) = -\lambda\, \underline{\nabla} g(x,y) \Leftrightarrow \underline{\nabla}(f + \lambda g) = 0$

$\nabla \underbrace{(f + \lambda g)}_{=: h(x,y,\lambda)} = 0 \quad \wedge \quad g(x,y) = 0$: 3 Gleichungen für x, y, λ

$h(x,y,\lambda) = -(x^2+y^2) + \lambda(y-x-c)$

$$\Rightarrow \quad \nabla h = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= -2x - \lambda = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= -2y + \lambda = 0 \\ y - x - c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ Lösung: $\lambda = c$, $x = -\frac{c}{2}$, $y = \frac{c}{2}$

- Verallgemeinerung auf s Nebenbedingungen: $g_i(\underline{x}) = 0$, $i = 1, \dots, s$

$\hookrightarrow h(\underline{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_s) := f(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(\underline{x})$

s Lagrange-Parameter / -Multiplikator

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow n \text{ Gleichungen: } \nabla h(\underline{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = 0 \\ &s \text{ Gleichungen: } g_i(\underline{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, s \end{aligned}\right\} n+s \text{ Unbekannte } \checkmark$$

2.5 High(er)dimensional Taylor expansion

reminder: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \underbrace{(x-x_0)^k}_{\Delta x^k}$

generalization to $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ using vector notation:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}, \quad x_0 \in \mathbb{R} \longrightarrow \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{d}{dx} \to \underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k}_{(\Delta \underline{x} \bullet \underline{\nabla})^k} f(\underline{x}_0)$$

scalar product

up to order 2: $k = 0, 1, 2$

transposed: $\Delta \underline{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \underline{\nabla} f(\underline{x}_0) \bullet \Delta \underline{x} + \frac{1}{2} \Delta \underline{x}^T \underline{\underline{H}}(\underline{x}_0) \Delta \underline{x} + O(|\Delta \underline{x}|^3)$$

with the Hessian / Hesse matrix (of 2^{nd} derivatives)

$$\underline{\underline{H}}(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \partial_{x_1} f(\underline{x}_0) & \cdots & \partial_{x_1} \partial_{x_n} f(\underline{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_n} \partial_1 f(\underline{x}_0) & \cdots & \partial_{x_n} \partial_{x_n} f(\underline{x}_0) \end{pmatrix}$$

2.6 Extreme values

reminder: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with extreme value / extremum at a: $f'(a)=0$

↳ $f''(a) > 0$ ☺ : Minimum (positive curvature)

↳ $f''(a) < 0$ ☹ : Maximum (negative curvature)

↳ $f''(a) = 0$: anything is possible (including saddles)

generalization to $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$

$$df(\underline{a}) = \frac{\partial}{\partial x} f(\underline{a})\, dx + \frac{\partial}{\partial y} f(\underline{a})\, dy = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(\underline{a}) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a}) = 0$$

↳ Minimum: $\partial_x^2 f(\underline{a}) > 0$, $\partial_y^2 f(\underline{a}) > 0$, $D := (\partial_x^2 f)(\partial_y^2 f) - (\partial_x \partial_y f)^2 > 0$

$\partial_x \partial_x f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f$

↳ Maximum: $\partial_x^2 f(\underline{a}) < 0$, $\partial_y^2 f(\underline{a}) < 0$, $D > 0$

↳ Saddle: $D < 0$

↳ unclear (higher orders needed): $D = 0$

$\boxed{\begin{array}{l} n > 2: \\ df(\underline{a}) = 0 \\ \text{Eigenvalues of } \underline{\underline{H}}(\underline{a}): \\ \quad \hookrightarrow \text{all negative: Maximum} \\ \quad \hookrightarrow \text{all positive: Minimum} \end{array}}$

2.7 Extremum with constraints

idea: extremum of $f(x,y)$ for a constraint $g(x,y)=0$

↳ $\underline{\nabla} f(x,y) = -\lambda \underline{\nabla} g(x,y)$ (parallel gradients)

$\uparrow$

Lagrange multiplier

2.8 Integralrechnung (skalare Funktionen) in $\mathbb{R}^n$

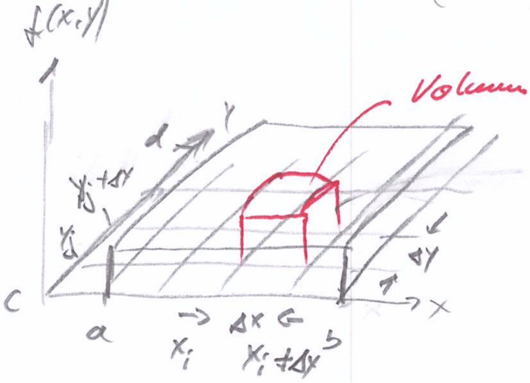
(1) Definition: ($\mathbb{R}^2$)

Sei $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ stetig in Ω (etwa $[a,b] \times [c,d]$). Wir definieren das **zweidimensionale Integral** als

$$\underbrace{\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{Volumen unter } f(x,y)} := \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{j=0}^{\frac{d-c}{\Delta y}-1} \sum_{i=0}^{\frac{b-a}{\Delta x}-1} f(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y$$

↳ Anzahl der Stützstellen: $N_x = \frac{b-a}{\Delta x}$ bzw. $N_y = \frac{d-c}{\Delta y}$

$\left(\Delta x = \frac{b-a}{N_x}\right)$ $\quad$ $\left(\Delta y = \frac{d-c}{N_y}\right)$



$x_i = a + i\Delta x$

$y_j = c + i\Delta y$

(2) Satz von Fubini:

Notation: $\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy \equiv \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{N_y \to \infty} \sum_{j=0}^{N_y-1} \Bigg(\underbrace{\lim_{N_x \to \infty} \sum_{i=0}^{N_x-1} f(x_i, y_j)\,\Delta x}_{\int_a^b (x, y_j)\,dx} \Bigg) \Delta y$$

$$= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$$

(3) Beispiele:

(i) $\Omega = [0,2] \times [0,1]$ (Rechteck), $f(x,y) = xy + y^2$

$$\Rightarrow \int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_0^1 dy\,(xy+y^2)$$

$$= \int_0^2 dx \left(\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}$$

$$= \int_0^2 dx \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x \Bigg|_{x=0}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}\,4 + \frac{1}{3}\,2 - 0$$

$$= \frac{5}{3}$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^2 dx\,(xy+y^2)$$

$$= \int_0^1 dy \left(\frac{1}{2}x^2 y + xy^2\right)\Bigg|_{x=0}^{2}$$

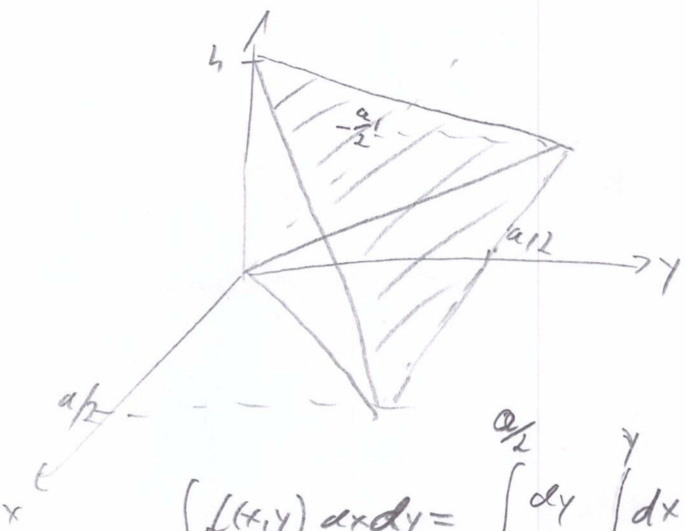
$$= \int_0^1 dy\,(2y + 2y^2)$$

$$= y^2 + \frac{2}{3}y^3 \Bigg|_{y=0}^{1}$$

$$= 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

(erst x- dann y-Integration liefert dasselbe Ergebnis)

(ii) Dreieck:



$$f(x,y) = h - \frac{h}{a/2}\,y$$

$$\Omega = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 \le y \le \frac{a}{2} \wedge -y \le x \le y\right\}$$

↑ x-Richtung hängt von y ab!

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{a/2} dy \int_{-y}^{y} dx \left(-\frac{2h}{a}y + h\right) = h\int_0^{\frac{a}{2}} dy \left(-\frac{2}{a}y + 1\right)x \Bigg|_{x=-y}^{x=y}$$

$$= h\int_0^{\frac{a}{2}} dy \left(-\frac{4}{a}y^2 + 2y\right) = h\left(-\frac{4}{3}y^3 + y^2\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\frac{a}{2}}$$

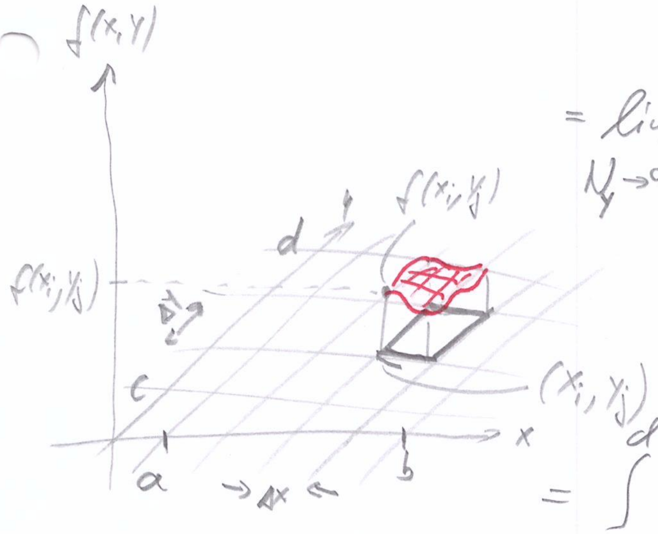
$$= \frac{1}{12}a^2 h$$ (Vgl. Viertel Pyramide $\frac{1}{3}a^2 h$)

2.8 Integration (of scalar functions) in $\mathbb{R}^n$

Def.: The 2-dimensional integral of $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (continuous) over $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ is defined as:

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy := \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{j=0}^{\frac{d-c}{\Delta y}-1} \sum_{i=0}^{\frac{b-a}{\Delta x}-1} f(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y .$$

$$\left(\begin{array}{llll} \text{with} & x_i = a + i\,\Delta x & \text{and} & N_x = \frac{b-a}{\Delta x} \\ & y_j = c + j\,\Delta y & & N_y = \frac{d-c}{\Delta y} \end{array} \right)$$



$$= \lim_{N_y \to \infty} \lim_{N_x \to \infty} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{i=0}^{N_x-1} f(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y$$

volume of cuboid: $f(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y$

$$= \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Fubini's theorem:

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx$$

(4) Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^n$:

$$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f = f(x_1, \dots, x_n), \quad \Omega = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$$

stetig in Ω

$$\Rightarrow \int_\Omega f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \equiv \int_\Omega f(x_1, \dots, x_n)\, d^n x$$

$$= \int_{I_1} dx_1 \int_{I_2} dx_2 \dots \int_{I_n} dx_n\, f(x_1, \dots, x_n)$$

Bsp./Notation:

(i) Flächenintegrale: $\displaystyle\int_\Omega f(x,y)\, dx\,dy \equiv \int_\Omega f(x,y) \underbrace{dA}_{\text{Flächenelement}}$

(ii) Volumenintegrale: $\displaystyle\int_\Omega f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz \equiv \int_\Omega f(\underline{x})\, d^3x = \int_\Omega f(x_1, x_2, x_3)\, d^3x$

$$= \int_\Omega f(x,y,z) \underbrace{dV}_{\text{Volumenelement}}$$

(iii) Dichte: diskret $\varrho = \dfrac{\Delta m}{\Delta V}$

$\hookrightarrow$ Gesamtmasse: $\displaystyle M = \int_{\text{Volumen}} \varrho\, dV$

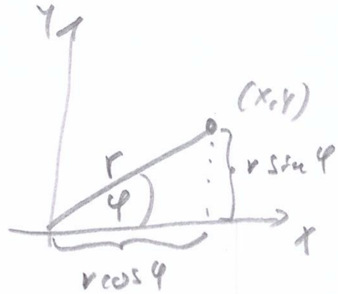
(iv) Volumen einer Teilmenge des $\mathbb{R}^3$: $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$V = \int_\Omega 1\, d^3x = \int_\Omega dV$$

2.9 Variablen-/Koordinatentransformationen

Idee: Koordinaten, die an die Symmetrie des Systems/Problems angepasst sind. $\Rightarrow$ Rechnungen vereinfachen

2.9.1 Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$



$x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ mit $r \in [0,\infty)$, $\varphi \in [0,2\pi)$

$y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi$

$\Rightarrow$ totale Differenziale: $dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi$

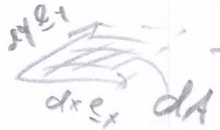
$= \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$

$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$

Zusammengefasst als Jacobi-Matrix $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$

Flächenelement: $dA = dx\,dy = \det \underline{\underline{J}}\, dr\, d\varphi = \underbrace{\cos\varphi\, r\cos\varphi - (-r\sin\varphi)\sin\varphi}\, dr\, d\varphi$

Achtung: nicht Produkt aus dx & dy, sondern $(dx\,\underline{e}_x \times dy\,\underline{e}_y)$



$= r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, dr\, d\varphi$

$= r\, dr\, d\varphi$

$$\Rightarrow \int_\Omega f(x,y)\, dA = \int_{(x,y)\in\Omega} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{(r,\varphi)\in\Omega} f(x(r,\varphi), y(r,\varphi))\, r\, dr\, d\varphi$$

Bsp.: (i) Fläche eines Kreises $\{(r,\varphi) \mid r<R,\ 0\le\varphi<2\pi\}$

$$A = \int_{Kreis} dA = \int_{(r,\varphi)\in Kreis} r\, dr\, d\varphi = \int_0^R dr\, r \int_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^R dr\, r\, 2\pi = \frac{1}{2}\pi R^2 2\pi$$

$$= \pi R^2$$

(ii) Gauß-Integral: $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ (S. 483)

Trick: Berechne $I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-ay^2}\right)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-a(x^2+y^2)}$$ (Integral über (x,y)-Ebene)

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

Kettenregel!

$$\to = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-ar^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\frac{1}{2a} e^{-ar^2}\right)\Big|_{r=0}^{\infty}$$

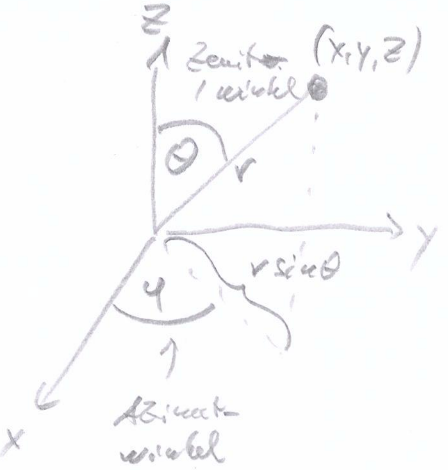
$$= \frac{1}{2a} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2a}\, 2\pi = \frac{\pi}{a}$$

$\Rightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

normierte Gauß-Funktion: $\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}}\, e^{-ax^2} dx = 1$

2.3.2 Kugelkoordinaten



$$x = x(r,\theta,\varphi) = r \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = y(r,\theta,\varphi) = r \sin\theta \sin\varphi$$

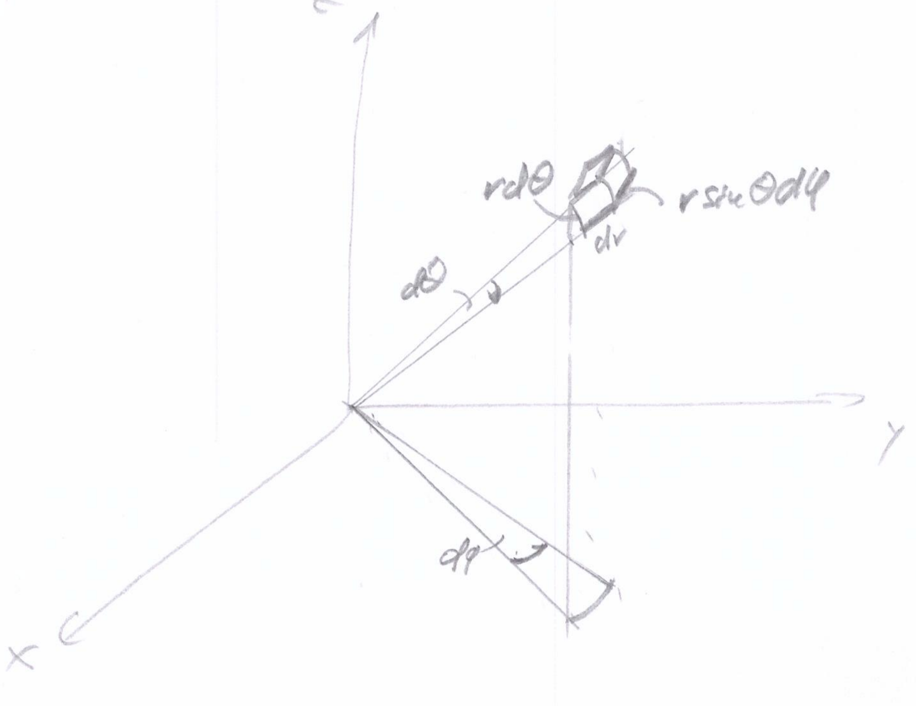
$$z = z(r,\theta,\varphi) = r \cos\theta$$

mit $r \in [0,\infty)$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi)$

Jacobi-Matrix: $$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Spatpr}}{\Rightarrow} \det \underline{\underline{J}} = r^2 \sin\theta \Rightarrow \underset{\text{Volumenelement}}{dV} = dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\int_\Omega f(x,y,z)\, dV = \int_{(x,y,z)\in\Omega} f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = \int_{(r,\theta,\varphi)\in\Omega} f(x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi))\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$



Bsp.: (i) Volumen einer Kugel: $\{(r,\theta,\varphi) \mid r\leq R,\ 0\leq\theta\leq\pi,\ 0\leq\varphi<2\pi\}$

$$V = \int_{\text{Kugel}} dV = \int_{(r,\theta,\varphi)\in\text{Kugel}} r^2 \sin\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

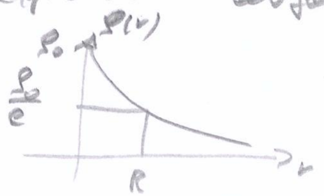
$$= \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, r^2 \sin\theta$$

$$= \underbrace{\int_0^R dr\, r^2}_{\frac{1}{3}R^3} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta}_{-\cos\theta\big|_0^\pi = +2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

$$= \frac{4\pi}{3} R^3$$

(ii) Gesamtmasse einer exponentiell abfallenden Dichte:

$$\rho(r) = \rho_0\, e^{-\frac{r}{R}}$$



$$M = \int_{\text{ganzer Raum}} \rho(r)\, dV$$

$$= \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}_{\int d\Omega = 4\pi} \underbrace{\int_0^\infty dr\, r^2 \rho_0 e^{-\frac{r}{R}}}_{= \rho_0 R^3 \int_0^\infty du\, u^2 e^{-u}}$$

Raumwinkel

$u = \frac{r}{R}$

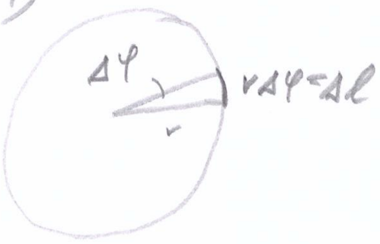
$R\, du = dr$

$\int_0^\infty du\, u^2 e^{-u} = 2!$ (vgl. 1.10)

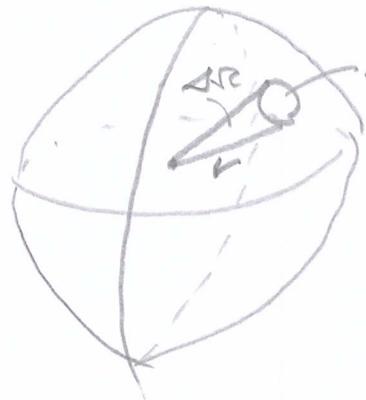
$$= 8\pi \rho_0 R^3$$

Raumwinkel:

2D



3D



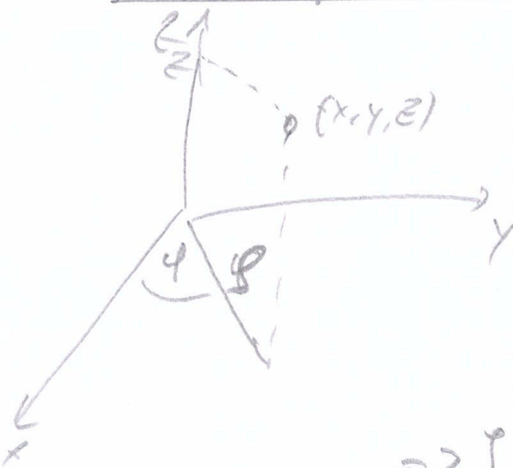
gesamter Raumwinkel:

$$\Omega = \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi = \frac{\text{Kugeloberfläche}}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow dV = dA\,dr = r^2\,dr\,d\Omega \underset{\substack{\uparrow \\ d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}}{=} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unabhängig} \\ \text{von Winkeln } \theta, \varphi}}{f(r)}\, dV = \int d\Omega \int dr\, f(r) = 4\pi \int dr\, f(r)$$

2.9.3 Zylinderkoordinaten



$$x = x(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi$$

$$y = y(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi$$

$$z = z$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \underline{\underline{J}} = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho$$

$\Rightarrow$ Volumenelement: $dV = dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$

Bsp.: Zylindervolumen:

$$V = \int_{\text{Zylinder}} dV = \int_{(\rho,\varphi,z)\in\text{Zylinder}} \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^R d\rho\,\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\overset{\text{Höhe}}{\downarrow}H} dz$$

$$= \frac{1}{2}R^2 \quad 2\pi \quad H$$

$$= \pi R^2 H$$

Theoretische Physik Ia

Rechenmethoden der Mechanik

Klausuraufgaben zu Kapitel 1

aus Klausur 1 im WS 23/24

Aufgabe 2 *Integrale (9 Punkte)*

Bestimmen Sie folgende Integrale:

a)

$$\int \ln(x^2)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

(3 Punkte)

b)

$$\int_0^2 2x\,\exp(x^2)\,\mathrm{d}x$$

(2 Punkte)

c) Wir betrachten einen Halbkreisring mit Masse M, Innenradius $r_1 = 1$ und Außenradius $r_2 = 2$, der in der x-y-Ebene so orientiert ist, dass sich der Schwerpunkt auf der y-Achse befindet. Gesucht ist die y-Koordinate des Schwerpunktes, gegeben durch

$$S_y = \frac{1}{M}\int_{\text{Halbkreisring}} y\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

wobei die Massendichte (Masse pro Fläche) $\rho(x,y) = 1$ konstant ist und die Fläche des Halbkreisrings gegeben ist mit $A = \frac{3}{2}\pi$.

(i) Skizzieren Sie den Halbkreisring in der x-y-Ebene. *(1 Punkt)*

(ii) Berechnen Sie S_y und zeichnen Sie ihn in die Skizze. *(3 Punkte)*
Hinweis: Führen Sie die Rechnung in Polarkoordinaten aus.

Aufgabe 4 *Mehrdimensionale Taylorentwicklung (12 Punkte)*

a) Geben Sie die allgemeine mehrdimensionale Taylorentwicklung einer Funktion $f(x, y)$ um den Entwicklungspunkt (x_0, y_0) bis zur 2. Ordnung (also bis zur quadratischen Näherung) an.
(2 Punkte)

b) Bestimmen Sie nun konkret die Taylorentwicklung der Funktion $g(x, y) = e^{xy} + \sin(x^2 + y^2)$ um den Entwicklungspunkt $(0, \sqrt{\pi})$ bis zur 2. Ordnung. *(9 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass sich die Taylorentwicklung von $g(x, y)$ um $(0, \sqrt{\pi})$ zusammenfassen lässt zu:
(1 Punkt)

$$g(x, y) = 1 + \pi + xy + \frac{\pi - 2}{2}x^2 - y^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3, \Delta y^3)$$

Erinnerung: VL 21.11. (asynchron): Vorbereitung *3. Vektoralgebra*

1. ***Skalare***
2. ***Vektoren im kartesischen Raum***
3. ***Skalarprodukt***
4. ***Kreuzprodukt/Vektorprodukt***
5. Levi-Civita-Symbol
6. Mehrfachprodukte

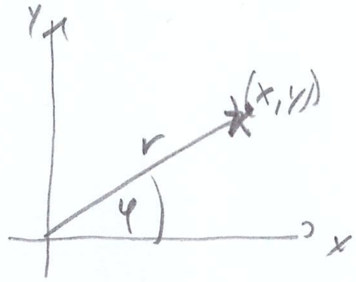
Aufgabe:

a. **Textbuch wälzen**
b. **Glossar wichtiger Begriffe erstellen**
c. **Intuition schärfen**
   - **Visualisierung, Abbildungen**
   - **Eselsbrücken**
   - **Beispiele**

Fazit: keine VL im Hörsaal am 21.11.

2.9 Coordinate transforms

2.9.1 Polar coordinates in $\mathbb{R}^2$

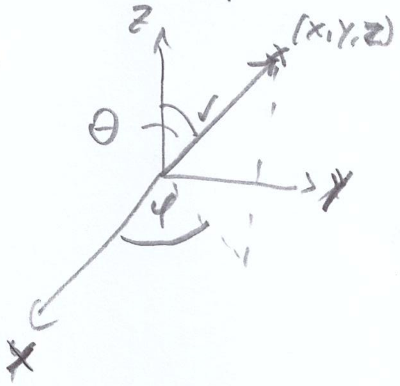


$$x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi, \quad y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi, \quad r\in[0,\infty),\ \varphi\in[0,2\pi)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ area element: $dA = \det \underline{\underline{J}}\, dr\, d\varphi = r\, dr\, d\varphi$

2.9.2 Spherical coordinates

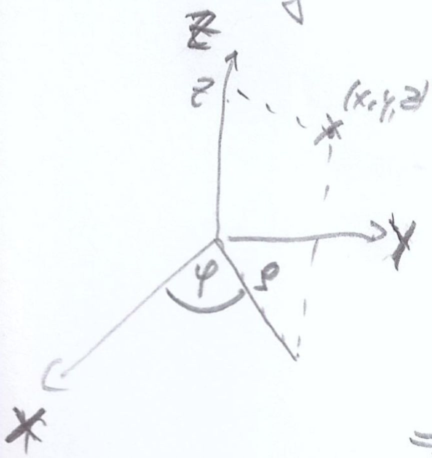


$$x = x(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = y(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\sin\varphi, \quad r\in[0,\infty),\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi)$$
$$z = z(r,\theta,\varphi) = r\cos\theta$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ volume element: $dV = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

2.9.3 Cylindrical coordinates



$$x = x(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi$$
$$y = y(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi$$
$$z = z = z$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow dV = \rho\, d\rho\, dz\, d\varphi$

3. Vektoralgebra

3.1 Skalare
3.2 Vektoren im kartesischen Raum
3.3 Skalarprodukt
3.4 Kreuzprodukt/Vektorprodukt
3.5 Levi-Civita-Symbol
3.6 Mehrfachprodukte

3.1 Skalare

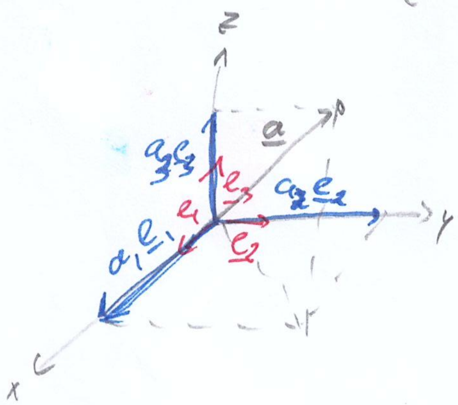
Ein Skalar ist eine Zahl.

Bsp.: · Masse m, Temperatur T, Energie E, ...

3.2 Vektoren im kartesischen Raum

Kartesisch nach René Descartes (31.3.1596 – 11.2.1650)

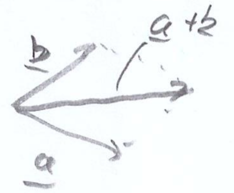
- Vektor $\underline{a}$: Verschiebung im Raum $\mathbb{R}^n$ (meist $n=3$)
- Länge $|\underline{a}| = a$ und Richtung $\nearrow^{\underline{a}}$ (unabhängig vom Koordinatensystem)
- Kartesische Basis $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$: $\underline{a} = a_x \underline{e}_x + a_y \underline{e}_y + a_z \underline{e}_z$



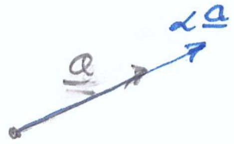
$$\equiv a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3$$

$$\equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad a_i: \text{kartesische Koordinaten}$$

- Vektoraddition



- Vektormultiplikation (skalar)



- Bsp.: Kraft $\underline{F}$, Impuls $\underline{p}$, Geschwindigkeit $\underline{v}$, Ort $\underline{r}$, E-Feld $\underline{E}$ ...

3.3 Skalarprodukt

auch "dot product"

Def.: Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten ist definiert als eine Abbildung

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (\underline{a},\underline{b}) \mapsto \underline{a}\cdot\underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \equiv \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$$

Def.: Die **Länge/Norm** eines Vektors ist definiert als

$$a \equiv \|\underline{a}\| \equiv |\underline{a}| := \sqrt{\underline{a}\cdot\underline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}$$

- **normierter Vektor:** $\hat{\underline{a}} = \dfrac{\underline{a}}{|\underline{a}|} \Rightarrow |\hat{\underline{a}}| = \left|\dfrac{\underline{a}}{|\underline{a}|}\right| = \dfrac{|\underline{a}|}{|\underline{a}|} = 1$

- Eigenschaften des Skalarprodukts:

  (i) **bilinear**: linear in jedem Anteil:

  $$\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha\underline{a}, \underline{b}) = \alpha(\underline{a}, \underline{b})$$

  $$(\underline{a}, \underline{b}+\underline{c}) = (\underline{a}, \underline{b}) + (\underline{a}, \underline{c})$$

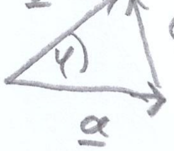
  (ii) **symmetrisch**: $(\underline{a},\underline{b}) = (\underline{b},\underline{a})$

  (iii) **positiv definit**: $(\underline{a},\underline{a}) \geq 0 \wedge (\underline{a},\underline{a}) = |\underline{a}|^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{a} = \underline{0}$

$\Rightarrow$ Das Skalarprodukt ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform.

- Geometrische Interpretation:

$$|\underline{c}|^2 = (\underline{b}-\underline{a})\cdot(\underline{b}-\underline{a})$$



$\underline{c} = \underline{b} - \underline{a}$

$$= |\underline{b}|^2 + |\underline{a}|^2 - 2\underline{a}\cdot\underline{b}$$

Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$

$$\Rightarrow \quad \underline{a}\cdot\underline{b} = ab\cos\varphi$$

$\Rightarrow$ Für $\underline{a}, \underline{b} \neq \underline{0}$ gilt: $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0 \Leftrightarrow \underline{a} \perp \underline{b}$ (also $\varphi = \pm 90° = \pm\frac{\pi}{2}$)

3.1 Scalars

scalars = numbers (plus unit)

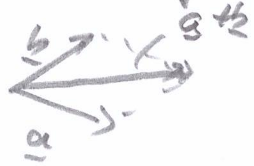
3.2 Vectors in Cartesian spaces

- vector: $\underline{a}$ shift in $\mathbb{R}^n$ (most often forces: $n=3$)
  ↳ length/magnitude $|\underline{a}| = \|\underline{a}\| \equiv a$ and direction
- Cartesian bases $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$:

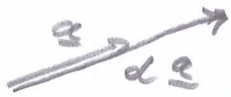
$$\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i \underline{e}_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Cartesian coordinates

- adding 2 vectors



- multiplying a vector with a scalar



3.3 Dot product (scalar product)

- The dot product of 2 vectors $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ with Cartesian coordinates $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, respectively, is defined as a algebraic operation:

$$(\circ,\circ): \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\underline{a}, \underline{b}) \longmapsto \underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- The length/magnitude/norm of a vector is defined as

$$a \equiv \|\underline{a}\| \equiv |\underline{a}| := \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}$$

- normalized vector: $\hat{\underline{a}} = \frac{\underline{a}}{a}$
- properties of the dot product:
  (i) bilinear: $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha \underline{a}, \underline{b}) = \alpha(\underline{a}, \underline{b})$
  $(\underline{a}, \underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a}, \underline{b}) + (\underline{a}, \underline{c})$
  (ii) symmetric: $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$
  (iii) positive definit: $(\underline{a}, \underline{a}) \geq 0 \wedge (\underline{a}, \underline{a}) = a^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{a} = \underline{0}$

- geometric interpretation:

$\underline{c} = \underline{b} - \underline{a}$ $\quad \underline{c}\cdot\underline{c} = |\underline{c}|^2 = c^2 = (\underline{b} - \underline{a})\cdot(\underline{b} - \underline{a})$

$$\left.= b^2 + a^2 - 2\,\underline{a}\cdot\underline{b}\right\} \underline{a}\cdot\underline{b} = ab\cos\varphi$$

Law of cosines: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$

$\Rightarrow$ for $\underline{a}, \underline{b} \neq \underline{0}$: $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0 \Leftrightarrow \underline{a} \perp \underline{b}$ $\quad (\varphi = \pm\frac{\pi}{2})$

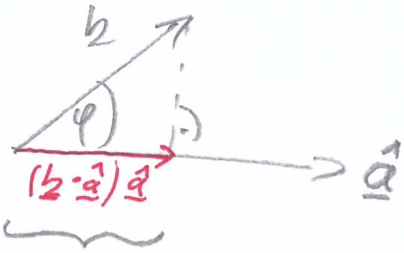
$\Rightarrow$ orthogonality

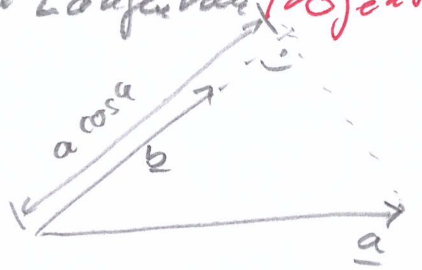
$\Rightarrow \varphi = \arccos \dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{ab} = \arccos \hat{\underline{a}}\cdot\hat{\underline{b}}$

Das Skalarprodukt definiert Winkel und Orthogonalität (gilt auch für $\mathbb{R}^n$ oder andere Vektorräume, etwa C (stetige Funktionen))

↳ $\varphi = \arccos\left(\frac{a\cdot b}{ab}\right)$

- Skalarprodukte liefern die Längen von Projektionen





Länge der Projektion $\left|(\underline{b}\cdot\hat{\underline{a}})\,\hat{\underline{a}}\right| = |\underline{b}\cdot\hat{\underline{a}}|\,\underbrace{|\hat{\underline{a}}|}_{=1} = |\underline{b}|\,|\hat{\underline{a}}|\cos\varphi$

$= |\underline{b}|\cos\varphi$

- Für eine orthonormale Basis (etwa die kartesische Basis

$$\hat{\underline{e}}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \hat{\underline{e}}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \hat{\underline{e}}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Bigg) \text{ gilt:}$$

$$\hat{\underline{e}}_i\cdot\hat{\underline{e}}_j = \delta_{ij} \qquad i = 1,2,3$$

$\Rightarrow$ Komponenten von $\underline{a}$: $\underline{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\,\hat{\underline{e}}_i \Rightarrow a_i = \underline{a}\cdot\hat{\underline{e}}_i$

$$\hookrightarrow\ \underline{a}\cdot\hat{\underline{e}}_i = \left(\sum_{j=1}^{3} a_j\,\hat{\underline{e}}_j\right)\cdot\hat{\underline{e}}_i = \sum_{j=1}^{3} a_j\,\underbrace{\hat{\underline{e}}_j\cdot\hat{\underline{e}}_i}_{\delta_{ij}} = a_i$$

$$\Rightarrow\quad \underline{a} = \sum_{i=1}^{3}(\underline{a}\cdot\hat{\underline{e}}_i)\,\hat{\underline{e}}_i$$

3.4 Kreuz-/Vektorprodukt

Def.: Das **Kreuz-/Vektorprodukt** zweier Vektoren $\underline{a},\underline{b} \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten ist definiert als eine Abbildung:

$$\bullet \times \bullet : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\underline{a},\underline{b}) \longmapsto \underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Indizes zyklisch vertauscht $1 \to 2 \to 3$

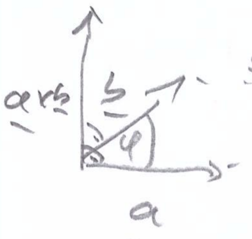
$(123) \to (231) \to (312)$

- Eigenschaften:
  - antisymmetrisch $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$
  - bilinear: $\underline{a} \times (\alpha \underline{b} + \beta \underline{c}) = \alpha(\underline{a} \times \underline{b}) + \beta(\underline{a} \times \underline{c})$
  - im Allgemeinen nicht assoziativ: $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \neq (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}$
  - Für $\hat{\underline{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\underline{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\underline{e}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\underline{e}}_1 \times \hat{\underline{e}}_2 &= \hat{\underline{e}}_3 \\ \hat{\underline{e}}_2 \times \hat{\underline{e}}_3 &= \hat{\underline{e}}_1 \\ \hat{\underline{e}}_3 \times \hat{\underline{e}}_1 &= \hat{\underline{e}}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Rechte-Hand-Regel}$$

- geometrische Interpretation:

(i) $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a} \ \wedge \ \underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$



(ii) $|\underline{a} \times \underline{b}|$ = Fläche des von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ aufgespannten Parallelogrammes.

↳ $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \iff \underline{a} \parallel \underline{b}$

↳ $\underline{a} \times \underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \sin\varphi \ \hat{\underline{n}}$

Normalvektor senkrecht auf $\underline{a}$ und $\underline{b}$

- Jacobi-Identität:

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) + \underline{b}\times(\underline{c}\times\underline{a}) + \underline{c}\times(\underline{a}\times\underline{b}) = \underline{0}$$

- Kreuzprodukt ist nur im $\mathbb{R}^3$ definiert.

- Physik: 1) Skalarprodukt: Arbeit, die ein Körper verrichtet:

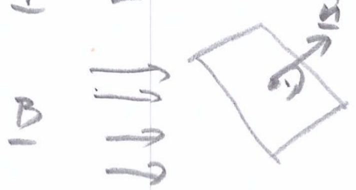
$$\Delta W = \underline{F}\cdot\Delta\underline{s} \longrightarrow W = \int_{Weg} \underline{F}\cdot d\underline{s} \quad \text{"Wegintegral"}$$

kleine Verschiebung

(ii) magnetischer Fluss durch Fläche:

$$\underline{\Phi} = \underline{B}\cdot(A\,\hat{\underline{n}})$$: nur $\underline{B}$ in Richtung von $\hat{\underline{n}}$ trägt bei

senkrecht auf A



2) Kreuzprodukt:

Drehmoment: $\underline{M} = \underline{r}\times\underline{F}$

Drehimpuls: $\underline{L} = \underline{r}\times\underline{p}$

Lorentzkraft: $\underline{F} = q\,\underline{v}\times\underline{B}$

3.5 Levi-Civita-Symbol

Def: Das **Levi-Civita-Symbol** ist definiert als

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{falls } ijk \text{ eine gerade Permutation } (1,2,3) \\ -1 & \text{------ " ------ ungerade ------ " ------} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gerade Permutation: (1 2 3), (3 1 2), (2 3 1)
ungerade Permutation: (1 3 2), (3 2 1), (2 1 3)

$$\Rightarrow \quad (\underline{a} \times \underline{b})_i = \sum_{jk=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k \equiv \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k$$

Einsteinsche Summenkonvention! über doppelte Indizes wird summiert!

$\Rightarrow$ **Graßmann-Identität:**

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{klm} = \underbrace{\delta_{il}\, \delta_{jm}}_{\text{links-rechts}} - \underbrace{\delta_{im}\, \delta_{jl}}_{\text{außen-innen}}$$

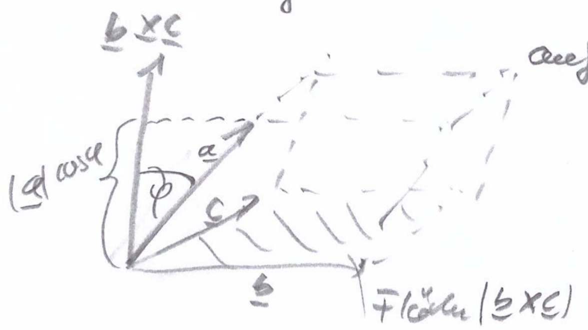
3.6 Mehrfachprodukte

(i) doppeltes Kreuzprodukt: **bac-cab Regel**

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}\,(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}\,(\underline{a} \cdot \underline{b})$$

(ii) **Spatprodukt**: $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$

geometrische Interpretation: Volumen eines von $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ aufgespannten Parallelepipeds.



$$V = \underbrace{|\underline{b} \times \underline{c}|}_{\text{Fläche}}\ \underbrace{|\underline{a}| \cos\varphi}_{\text{Höhe}}$$

↳ gleiches Volumen bei zyklischer Vertauschung:

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$$

↳ Berechnung über Determinante:

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_i \, (\underline{b} \times \underline{c})_i$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \, a_i b_j c_k$$

(iii) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d})(\underline{b} \cdot \underline{c})$

links rechts — außen innen

↳ $(\underline{a} \times \underline{b})^2 = (\underline{a} \cdot \underline{a})(\underline{b} \cdot \underline{b}) - (\underline{a} \cdot \underline{b})(\underline{b} \cdot \underline{a})$

$$= a^2 \, b^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2$$

$$= a^2 b^2 - (ab \cos\varphi)^2$$

$$= a^2 b^2 (1 - \cos^2\varphi)$$

$$= a^2 b^2 \sin^2\varphi$$

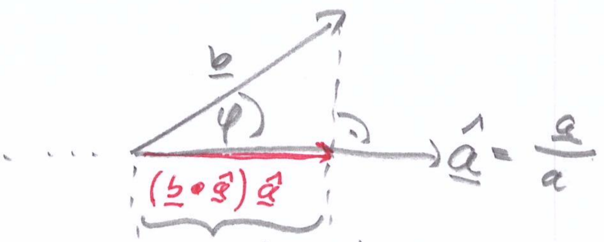
↳ $\underline{a} \times \underline{b} = a b \sin\varphi \; \hat{\underline{n}}$

3.3 Dot product (continued)

$(\cdot,\cdot): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (most often $n=3$)

$(\underline{a},\underline{b}) \longmapsto \underline{a}\cdot\underline{b} \equiv \langle \underline{a},\underline{b}\rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$

projection of $\underline{b}$ onto $\underline{a}$:



length: $|\underline{b}\cdot\hat{\underline{a}}| = b\cos\varphi$

orthonormal basis: $\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n\}$ with $\underline{e}_i\cdot\underline{e}_j = \delta_{ij}$ (orthogonal)

and $|\underline{e}_i| = 1$ (normalized)

3.4 Cross product

The crossproduct of 2 vectors $\underline{a},\underline{b}\in\mathbb{R}^3$ is defined as

$(\cdot,\cdot): \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

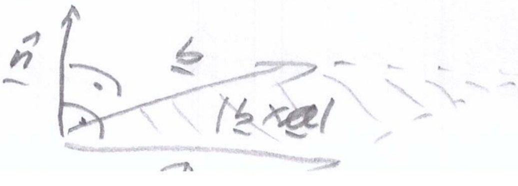
$$(\underline{a},\underline{b}) \longmapsto \underline{a}\times\underline{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Properties:

- antisymmetric: $\underline{a}\times\underline{b} = -\underline{b}\times\underline{a}$
- bilinear : $\underline{a}\times(\alpha\underline{b}+\beta\underline{c}) = \alpha(\underline{a}\times\underline{b}) + \beta(\underline{a}\times\underline{c})$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\underline{a},\underline{b},\underline{c}\in\mathbb{R}^3$
- not associative: $\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) \neq (\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{c}$
- $(\underline{a}\times\underline{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k$ with Levi-Civita-Symbol ε_{ijk}
- geometric interpretation (i) $\underline{a}\times\underline{b} \perp \underline{a} \wedge \underline{a}\times\underline{b} \perp \underline{b}$

  (ii) $|\underline{a}\times\underline{b}|$ = area of parallelogram spanned by $\underline{a},\underline{b}$

- $\underline{a}\times\underline{b} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{a}\parallel\underline{b}$
- $\underline{a}\times\underline{b} = |a|\,|b|\sin\varphi\,\hat{\underline{n}}$



3.5 Levi-Civita-Symbol

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{for } ijk \text{ even permutation of } (1,2,3) \\ -1 & \text{— " — odd — " —} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

	i=1			i=2			i=3		
j \ k	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0
2	0	0	1	0	0	0	-1	0	0
3	0	-1	0	1	0	0	0	0	0

3.5 Levi-Civita-Symbol

Def: Das **Levi-Civita-Symbol** ist definiert als

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{falls } ijk \text{ eine gerade Permutation } (1,2,3) \\ -1 & \text{falls } ijk \text{ eine ungerade Permutation} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gerade Permutationen: (1 2 3), (3 1 2), (2 3 1)

ungerade Permutationen: (1 3 2), (3 2 1), (2 1 3)

$$\Rightarrow \quad (\underline{a} \times \underline{b})_i = \sum_{jk=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \, a_j \, b_k \equiv \varepsilon_{ijk} \, a_j b_k$$

Einsteinsche Summenkonvention! über doppelte Indizes wird summiert!

$\Rightarrow$ **Graßmann-Identität:**

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \, \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \, \delta_{jm} - \delta_{im} \, \delta_{jl}$$

links-rechts   außen-innen

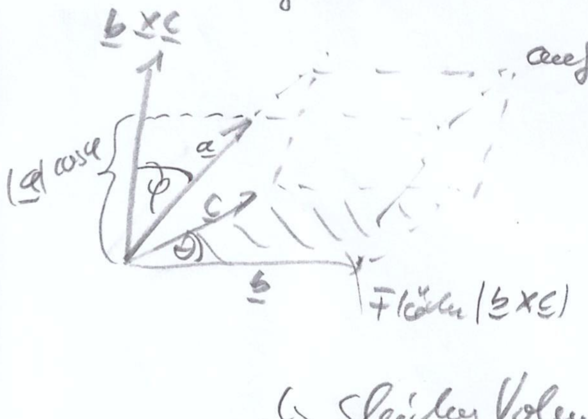
3.6 Mehrfachprodukte

(i) doppeltes Kreuzprodukt: **bac-cab Regel**

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \, (\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c} \, (\underline{a} \cdot \underline{b})$$

(ii) **Spatprodukt**: $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$

geometrische Interpretation: Volumen des von $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ aufgespannten Parallelepipeds.



$$V = \underbrace{|\underline{b} \times \underline{c}|}_{\text{Fläche}} \; \underbrace{|\underline{a}| \cos\varphi}_{\text{Höhe}}$$

$$= abc \sin\theta \cos\varphi$$

↳ gleiches Volumen bei zyklischer Vertauschung:

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$$

↳ Berechnung über Determinante:

$$\underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_i\,(\underline{b}\times\underline{c})_i$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k$$

(iii) $(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{c}\times\underline{d}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})(\underline{b}\cdot\underline{d}) - (\underline{a}\cdot\underline{d})(\underline{b}\cdot\underline{c})$

links rechts   außen innen

↳ $(\underline{a}\times\underline{b})^2 = (\underline{a}\cdot\underline{a})(\underline{b}\cdot\underline{b}) - (\underline{a}\cdot\underline{b})(\underline{b}\cdot\underline{a})$

$$= a^2\ b^2 - (\underline{a}\cdot\underline{b})^2$$

$$= a^2b^2 - (ab\cos\varphi)^2$$

$$= a^2b^2(1-\cos^2\varphi)$$

$$= a^2b^2\sin^2\varphi$$

↳ $\underline{a}\times\underline{b} = ab\sin\varphi\ \underline{\hat{n}}$

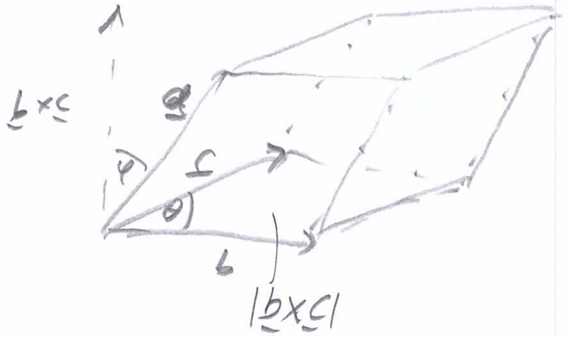
3.6 Products involving 3 vectors / tripl product

(i) bac - cab rule : $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}\,(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}\,(\underline{a} \cdot \underline{b})$

"bac minus cab" rule

(ii) (scalar) triple product : $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$ = volume of parallelepiped spanned by $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$

box product



$$= \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$$

$$= \det\begin{pmatrix} | & | & | \\ \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{ijk=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i\, b_j\, c_k$$

(iii) Lagrange's identity :

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = \underbrace{(\underline{a} \cdot \underline{c})}_{\text{left}}\ \underbrace{(\underline{b} \cdot \underline{d})}_{\text{right}} - \underbrace{(\underline{a} \cdot \underline{d})}_{\text{outer}}\ \underbrace{(\underline{b} \cdot \underline{c})}_{\text{inner}}$$

4 Vektoranalysis

4.1 Konservative Vektorfelder
4.2 Ableitungen von Vektorfeldern
4.3 Gradienten- und Wirbelfelder
4.4 Raumkurven
4.5 Bogenlänge
4.6 Wegintegrale
 4.6.1 Skalare Wegintegrale
 4.6.2 Vektorielle Wegintegrale
4.7 Parametrisierung von Flächen
4.8 Oberflächenintegrale
4.9 Satz von Gauß
4.10 Satz von Stokes
4.11 Partielle Integration
(4.13 Integralsatz von Green)
(4.14 Basissysteme krummliniger Koordinaten)

4.1 (Konservative) Vektorfeldern

Def.: Ein Vektorfeld ist eine im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stetige Abbildung

$$v : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \underline{x} \longmapsto \underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ v_n(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

Def.: Ein Vektorfeld $\underline{v}$ heißt C^s-Vektorfeld, falls die Komponenten $v_1, \dots, v_n$ s-fach stetig differenzierbar sind.

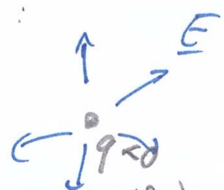
Bsp.: - Elektrisches / magnetisches Feld
- Geschwindigkeitsfeld von Strömungen
- Gravitationsfeld

Def.: Ein Vektorfeld $\underline{v}(\underline{x})$ heißt konservativ (oder Potenzialfeld | Gradientenfeld), falls es sich als Gradient eines Skalarfeldes $\phi(\underline{x})$ (Potenzials) schreiben lässt:

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\nabla}\, \phi(\underline{x})$$

Bsp.: (i) Elektrisches Feld einer Punktladung q im Ursprung:

$$\underline{E}(\underline{x}) = -\underline{\nabla}\, \phi(\underline{x}) \quad \text{mit} \quad \phi(\underline{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{x}|}$$



Probe: $\underline{\nabla} \frac{1}{|\underline{x}|} = \underline{\nabla} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = -\frac{\underline{x}}{\underline{x}^3}$

(ii) Frage: Hat das Vektorfeld

$$\underline{v} \equiv \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y e^{xy} + z \\ x e^{xy} \\ x + 2z \end{pmatrix}$$

ein Potenzial?

Antwort: Dann müsste $\phi(x,y,z)$ existieren mit

$$\partial_x \phi = v_x \quad , \partial_y \phi = v_y \quad , \partial_z \phi = v_z .$$

Idee: Integration & Angleichen der Konstanten

(a) $\phi = \int v_x \, dx = e^{xy} + xz + C_1(y,z)$

(b) $\phi = \int v_y \, dy = e^{xy} \qquad + C_2(x,z)$

(c) $\phi = \int v_z \, dz = xz + z^2 + C_3(x,y)$

$\Rightarrow$ Alle 3 Bedingungen erfüllt durch:

$C_1(y,z) = z^2$, $C_2(x,z) = xz + z^2$, $C_3(x,y) = e^{xy}$

$\Rightarrow \phi = e^{xy} + xz + z^2$

$\Rightarrow \underline{v}$ ist konservativ

4.2 Ableitung von Vektorfeldern

(i) Def: Die Rotation (Wirbeldichte) eines Vektorfeldes $\underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ v_2(\underline{x}) \\ v_3(\underline{x}) \end{pmatrix}$

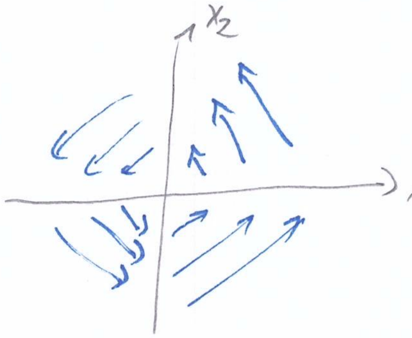
ist definiert als (in kartesischen Koordinaten)

$$\text{rot}\, \underline{v} \equiv \underline{\nabla} \times \underline{v} := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ v_2(\underline{x}) \\ v_3(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 & -\partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 & -\partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 & -\partial_2 v_1 \end{pmatrix} .$$

oder auch: $(\text{rot}\, \underline{v})_i = \varepsilon_{ijk} \, \partial_j v_k$ (Summenkonvention!)

$$\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \, \partial_j v_k$$

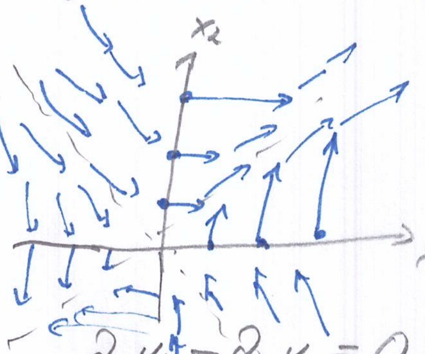
Bsp: (a) $\underline{v} = \begin{pmatrix} -\omega x_2 \\ +\omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot} \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega + \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix}$



$\Rightarrow \operatorname{rot} \underline{v}$ in z-Richtung (Rechte-Daumen-Regel)

(b) Bei Bsp (a) $(\operatorname{rot} \underline{v})_3 = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$

vergleiche



$\underline{v} = \begin{pmatrix} \omega x_2 \\ \omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \underbrace{\partial_1 v_2}_{>0} - \underbrace{\partial_2 v_1}_{<0} \neq 0 \Rightarrow$ Wirbel!

$\underbrace{\partial_1 v_2}_{>0} - \underbrace{\partial_2 v_1}_{>0} = 0 \Rightarrow$ keine Wirbel!

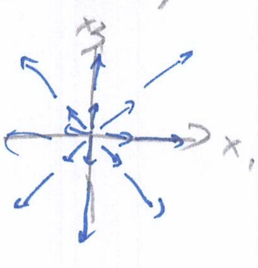
Idee: Wie ändert sich v_1 in Richtung 2 im Vergleich zu v_2 in Richtung 1?

(ii) Def: Die Divergenz (Quellendichte) von $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ v_2(\underline{x}) \\ v_3(\underline{x}) \end{pmatrix}$ ist definiert als:

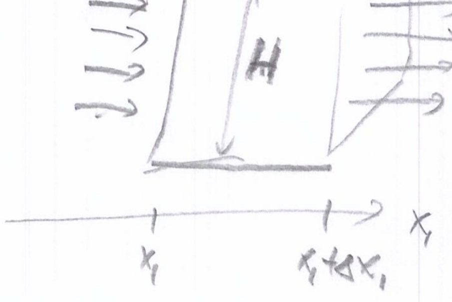
$$\operatorname{div} \underline{v} \equiv \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \equiv \partial_i v_i \quad \text{(Summenkonvention)}$$

Bsp: (i) $\underline{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} -\omega x_2 \\ \omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ (keine Quellen)

(ii) $\underline{\nabla} \cdot \underline{x} = \underline{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3$



(iii)



Zufluss: $Z = v_1(x_1)\, HT$

Abfluss: $A = v_1(x_1 + \Delta x_1)\, HT$

$\Rightarrow$ Netto pro Volumen:

$$\frac{1}{\Delta x_1 HT}(A - Z) = \frac{v_1(x_1 + \Delta x_1) - v_1(x_1)}{\Delta x_1} \xrightarrow[\Delta x_1 \to 0]{} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1)$$

4. Vector calculus / analysis

4.1 (Conservative) vector fields

- Vectorfield: $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \mapsto \underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ v_n(\underline{x}) \end{pmatrix}$

  potentially dim Ω < n

- C^s-vectorfields: $v_1, \dots, v_n$ s-times continuously differentiable.

- Conservative vectorfield: $\underline{v}$ is gradient of scalar potential ϕ

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\nabla}\phi(\underline{x})$$

4.2 Derivations of vectorfields

- (Rotation) curl of $\underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ v_2(\underline{x}) \\ v_3(\underline{x}) \end{pmatrix}$:

$$\operatorname{rot}\underline{v} \equiv \underline{\nabla} \times \underline{v} := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$(\operatorname{rot}\underline{v})_i = \sum_{jk=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j v_k$$

- Divergence of $\underline{v}(\underline{x})$: $\operatorname{div}\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\nabla}\cdot\underline{v} := \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3$

(iii) Def: Der Laplace-Operator ist definiert als: $\Delta := \mathrm{div}\,\mathrm{grad}$

Also: $$\Delta\phi(x_1,x_2,x_3) = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\phi) = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})\cdot\begin{pmatrix}\partial_{x_1}\phi\\ \partial_{x_2}\phi\\ \partial_{x_3}\phi\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\phi$$

↳ Laplace-Gleichung: $\Delta\phi = 0$ (wichtig bei Transportprozesse, Potenzial theorie...)

Achtung: $\Delta\underline{A} = \frac{\partial^2\underline{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\underline{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\underline{A}}{\partial z^2} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\underline{A} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\underline{A} = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})$

Bem: • div, rot, grad sind linear: $\mathrm{rot}(\underline{u}+\underline{v}) = \mathrm{rot}\,\underline{u} + \mathrm{rot}\,\underline{v}$

$\mathrm{div}(\underline{u}+\underline{v}) = \mathrm{div}\,\underline{u} + \mathrm{div}\,\underline{v}$

$\mathrm{grad}(\phi+\psi) = \mathrm{grad}\,\phi + \mathrm{grad}\,\psi$

(!) Aufgabe 4.8a

• Produktregel: $\mathrm{div}(\phi\,\underline{v}) = \phi\,\mathrm{div}\,\underline{v} + (\mathrm{grad}\,\phi)\cdot\underline{v}$

$\mathrm{rot}(\phi\underline{A}) = \underline{\nabla}\phi\times\underline{A} + \phi(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = \mathrm{grad}\,\phi\times\underline{A} + \phi\,\mathrm{rot}\,\underline{A}$

4.3 Gradienten- & Wirbelfelder

Satz: Gradientenfelder $\underline{v} = \underline{\nabla}\phi$ sind wirbelfrei.

Beweis: $\mathrm{rot}\,\underline{v} = \underline{\nabla}\times\underline{v} = \underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\phi)$

i-te Komponente: $[\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\phi]_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j(\underline{\nabla}\phi)_k$

$$= \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\substack{\text{antisymm}\\ \text{in } j,k}}\ \underbrace{\partial_j\partial_k}_{\substack{\text{symm. in}\\ j\,k}}\phi = 0$$

Also: (i) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = \underline{\nabla}\times\underline{\nabla} = 0$

(ii) Umkehrung gilt auch: Jedes Wirbelfreie Feld $\underline{v}$ ($\mathrm{rot}\,\underline{v} = 0$) hat ein Potenzial ϕ ($\underline{v} = \underline{\nabla}\phi$)

$\Rightarrow$ $\underline{v}$ ist konservativ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rot}\,\underline{v} = 0$

Bsp.: $\underline{A}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -y^3 z \\ x e^z \\ e^{2y} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Berechne $\Delta \underline{A}$ (Laplace-Operator)

$$\Rightarrow \Delta \underline{A} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ e^z \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} -3y^2 z \\ 0 \\ 2e^{2y} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} -y^3 \\ x e^z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6yz \\ 0 \\ 4e^{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ xe^z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6yz \\ xe^z \\ 4e^{2y} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{A}) = \underline{\nabla} \left(\frac{\partial}{\partial x} A_1 + \frac{\partial}{\partial y} A_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_3 \right) =$$

$$= \underline{\nabla} \left(\frac{\partial}{\partial x}(-y^3 z) + \frac{\partial}{\partial y}(x e^z) + \frac{\partial}{\partial z}(e^{2y}) \right)$$

$$= \underline{\nabla}(0) = \underline{0}$$

$$-\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A}) = \underline{\nabla} \times \begin{pmatrix} 2e^{2y} - xe^z \\ -y^3 - 0 \\ e^z + 3y^2 z \end{pmatrix} = \underline{\nabla} \times \begin{pmatrix} 2e^{2y} - xe^z \\ -y^3 \\ e^z + 3y^2 z \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 6yz - 0 \\ -xe^z - 0 \\ 0 - 4e^{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6yz \\ xe^z \\ 4e^{2y} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta \underline{A} = \text{grad div} \underline{A} - \text{rot rot} \underline{A}$$

Satz: Wirbelfelder $\underline{v} = \text{rot}\,\underline{A}$ sind quellenfrei.

Beweis: $\text{div}\,\underline{v} = \text{div}(\text{rot}\,\underline{A}) = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}\underline{A} = \sum_i \partial_i\,(\underline{\nabla}\times\underline{A})_i$

$$= \sum_{ijk} \partial_i \;\varepsilon_{ijk}\,\partial_j A_k$$

$$= 0$$

Also: (i) div rot = 0

(ii) Umkehrung gilt auch: Jedes quellenfreie Feld hat ein Vektorpotential.

z.B.: $\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$

Anwendung: Maxwell-Gleichungen (homogene)

(a) $\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0$ (b) $\underline{\nabla}\times\underline{E} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0$

mit $\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$: $\underline{\nabla}\times\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}\times\underline{A} = 0$

Satz v. Schwarz: $\underline{\nabla}\times\left(\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}\right) = 0$

wirbelfrei: $\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = -\underline{\nabla}\phi$ Konvention

$\Rightarrow$ $\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$

$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$ ($\phi, \underline{A}$ nicht eindeutig → Eichtransformationen)

4.2 Derivations of vector fields

(iii) Laplace-Operator: (a) $\Delta\phi := \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\phi)$ scalar field potential

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi$$

(b) $\Delta\underline{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\underline{A} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\underline{A} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\underline{A} \overset{?}{=} \operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{A}$

$$= \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})$$

- rot, grad, div : linear operators
- product rules: (a) $\operatorname{div}(\phi\underline{v}) = \phi\operatorname{div}\underline{v} + (\operatorname{grad}\phi)\cdot\underline{v}$

$$\underline{\nabla}\cdot(\phi\underline{v}) = \phi(\underline{\nabla}\cdot\underline{v}) + (\underline{\nabla}\phi)\cdot\underline{v}$$

(b) $\operatorname{rot}(\phi\underline{A}) = \phi\operatorname{rot}\underline{A} + \operatorname{grad}\phi\times\underline{A}$

$$= \phi(\underline{\nabla}\times\underline{A}) + (\underline{\nabla}\phi)\times\underline{A}$$

4.3 Gradient field and curl

Theorem: (i) Gradient fields have no curl

$$\left.\begin{array}{l} \underline{v} = \underline{\nabla}\phi \implies \operatorname{rot}\underline{v} = \underline{0} \\ \text{(ii)}\quad \operatorname{rot}\underline{v} = \underline{0} \implies \underline{v} = \underline{\nabla}\phi \end{array}\right\} \ \underline{v}\text{ conservative} \iff \operatorname{rot}\underline{v} = 0$$

Theorem: (i) $\underline{v} = \operatorname{rot}\underline{A} \implies$ no sink / no source ($\operatorname{div}\underline{v} = 0$)

(ii) $\operatorname{div}\underline{v} = 0 \implies \underline{v} = \operatorname{rot}\underline{A}$

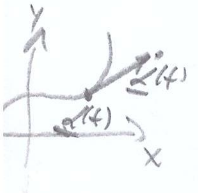
4.4 Raumkurven

Parametrisierung einer Raumkurve $C:[a,b]\to\mathbb{R}^n$

Def: Eine Raumkurve α ist eine stetig differenzierbare Abbildung vom Intervall $I\subset\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$:

$$\underline{\alpha}: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \vdots \\ \alpha_n(t)\end{pmatrix}$$

Def: Die Ableitung $$\dot{\underline{\alpha}}(t) := \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\underline{\alpha}(t+\Delta t)-\underline{\alpha}(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix}\dot\alpha_1(t)\\ \vdots \\ \dot\alpha_n(t)\end{pmatrix}$$

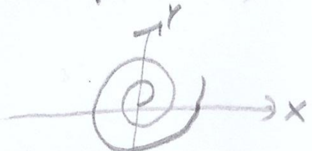


liefert den Tangentenvektor an die Kurve.

Def: Eine Raumkurve heißt regulär, wenn gilt: $\dot{\underline{\alpha}}(t)\neq\underline{0}\ \forall t\in I$.

Bsp.: (i) Archimedische Spirale (regulär für $t>0$)

$$t\longmapsto\begin{pmatrix}t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix}$$

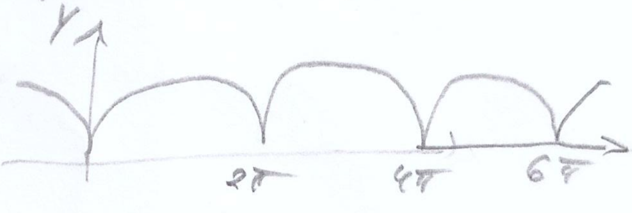


(ii) Schraubenlinie (regulär für $t\in\mathbb{R}$)

$$t\longmapsto\begin{pmatrix}R\cos t\\ R\sin t\\ h t\end{pmatrix}$$

(iii) Zykloide (nicht regulär für $t=0,\pm2\pi,\pm4\pi,\dots$

$$t\longmapsto\begin{pmatrix}t-\sin t\\ 1-\cos t\end{pmatrix}$$

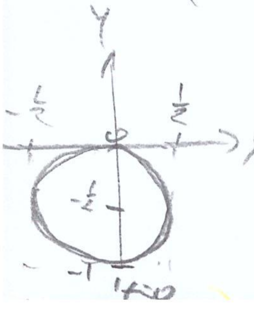


Punkt auf rollendem Rad

$$\dot{\underline{\alpha}}(t)=\begin{pmatrix}1-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\Rightarrow\dot{\underline{\alpha}}(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ für } t=0,\pm2\pi,\pm4\pi,\dots)$$

(iv) $$\underline{\alpha}: t\longmapsto\left(\frac{t}{t^2+1},\ -\frac{1}{t^2+1}\right)$$

Frage: Was beschreibt $\underline{\alpha}$?



$$\frac{x}{y}=-t \Rightarrow x=\frac{-\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2}+1}=\frac{x}{y\,\frac{x^2+y^2}{y^2}}=\frac{xy}{x^2+y^2}\Rightarrow x^2+y^2=y$$

$$\Rightarrow x^2+\left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4}\Rightarrow \text{Kreis mit Radius } \tfrac{1}{2} \text{ um } \left(0,-\tfrac{1}{2}\right).$$

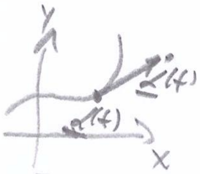
4.4 Raumkurven

Parametrisierung α einer Raumkurve $C:[a,b]\to\mathbb{R}^n$

Def: Eine Raumkurve α ist eine stetig differenzierbare Abbildung vom Intervall $I\subset\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$:

$$\alpha: I \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \vdots \\ \alpha_n(t)\end{pmatrix}$$

Def: Die Ableitung $\underline{\dot\alpha}(t) := \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\underline{\alpha}(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix}\dot\alpha_1(t)\\ \vdots \\ \dot\alpha_n(t)\end{pmatrix}$

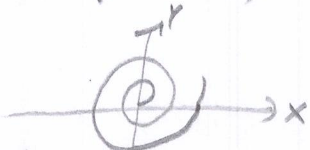


liefert den Tangentenvektor an die Kurve.

Def: Eine Raumkurve heißt regulär, wenn gilt: $\underline{\dot\alpha}(t) \neq \underline{0}\ \forall\, t\in I$.

Bsp.: (i) Archimedische Spirale (regulär für $t>0$)

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t\end{pmatrix}$$

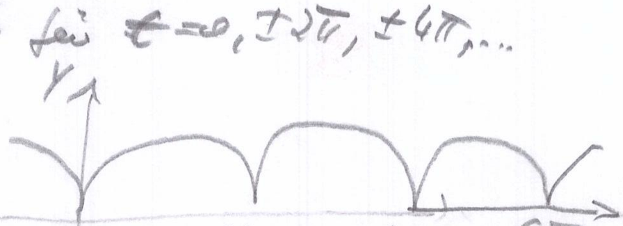


(ii) Schraubenlinie (regulär für $t\in\mathbb{R}$)

$$t \mapsto \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ h t\end{pmatrix}$$

(iii) Zykloide (nicht regulär für $t=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t-\sin t \\ 1-\cos t\end{pmatrix}$$



Punkt auf rollendem Rad

$$\underline{\dot\alpha}(t) = \begin{pmatrix}1-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\dot\alpha}(t) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ für } t=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots)$$

(iv) $\underline{\alpha}: t \longmapsto \left(\dfrac{t}{t^2+1}, -\dfrac{1}{t^2+1}\right)$

Frage: Was beschreibt $\underline{\alpha}$?

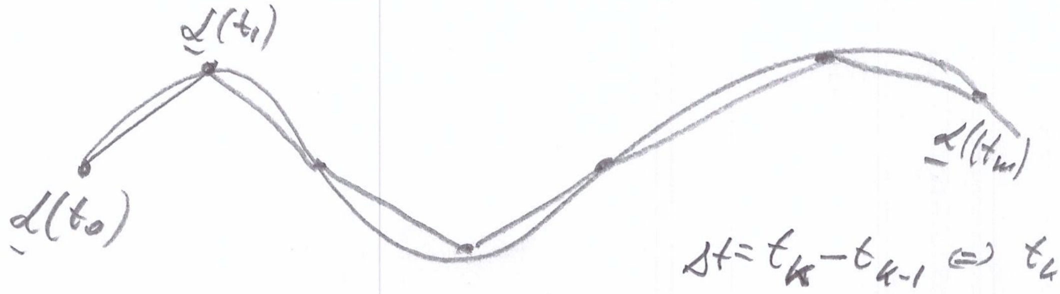
$$\frac{x}{y} = -t \Rightarrow x = \frac{-\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2}+1} = \frac{x}{y\,\frac{x^2+y^2}{y^2}} = \frac{xy}{x^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2 = y$$

$\Rightarrow x^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$ Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ um $(0, \frac{1}{2})$.

4.5 Bogenlänge

Frage: Länge eines Kurvenstücks C ($\underline{\alpha}: [a,b] \to C \subset \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \underline{\alpha}(t)$)

Idee: Näherung durch Polygonzug / Sehnenpolygone



$\Delta t = t_k - t_{k-1} \Leftrightarrow t_k = t_{k-1} + \Delta t$

$$\Rightarrow L_m = \sum_{k=1}^{m} \left| \underline{\alpha}(t_k) - \underline{\alpha}(t_{k-1}) \right| \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\underline{\alpha}(t_k) - \underline{\alpha}(t_{k-1})}{\Delta t} \right| \Delta t$$

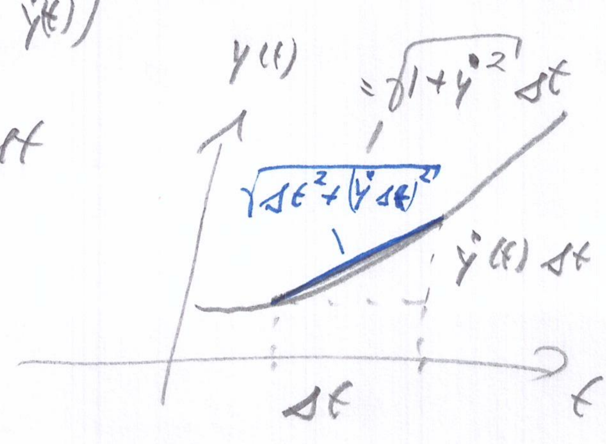
$$\underset{\Delta t \text{ klein}}{\approx} \sum_{k=1}^{m} \left| \dot{\underline{\alpha}}(t_{k-1}) \right| \Delta t$$

Satz: Für eine stetig differenzierbare Parametrisierung $\underline{\alpha}(t)$ der Kurve C ($\underline{\alpha}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$) gilt für die Länge von C:

$$L(C) = \int_a^b |\dot{\underline{\alpha}}(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}_i(t)^2}\, dt$$

Bsp.: $\underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow L(C) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{y}(t)^2}\, dt$$

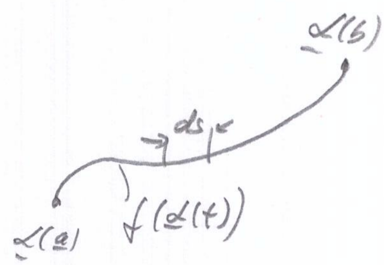


4.6 Wegintegrale

1. Skalares Wegintegral : bezieht sich auf Integrand (Skalarfeld)

Def.: Das skalare Weg-/Kurvenintegral von $f: \underline{x} \mapsto f(\underline{x})$ über eine Kurve $C: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \underline{\alpha}(t)$ ist definiert als

$$\int_C f(\underline{x})\,ds := \int_a^b f(\underline{\alpha}(t))\,|\dot{\underline{\alpha}}(t)|\,dt$$



mit dem Bogenelement $ds = |\dot{\underline{\alpha}}(t)|\,dt$.

Bsp.: (i) Länge einer Kurve (→ 4.5): $f(\underline{x}) = 1$.

(ii) Kreisförmiger Draht um Ursprung mit Radius R und Längendichte ρ (Masse pro Länge).

Frage: (a) Gesamtmasse

(b) Schwerpunkt

Idee: Parametrisierung der Drahtschleife $C: t \mapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow |\dot{\underline{\alpha}}(t)| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R$$

(a) $$M = \int_C dm = \int_C \rho\,ds = \int_0^{2\pi} \rho\, R\,dt = 2\pi R \rho$$

(b) $$\underline{R}_s = \frac{1}{M}\int_C \underline{r}\,dm = \frac{1}{M}\int_C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dm$$

↳ x-Koordinate: $$x_s = \frac{1}{M}\int_C x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} R\cos t\;\rho R\,dt$$

$$= 0$$ (y_s analog)

alternativ: $\underline{\alpha}(s) = R\begin{pmatrix} \cos 2s \\ \sin 2s \end{pmatrix}$ mit $s \in [0, \pi) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (x_s, y_s) = (0,0)$

Kettenregel (...) als Substitution ...

(2. vektorielle Wegintegrale (Integrand: Vektorfeld)

$\int 3$

Def.: Das vektorielle Weg-/Kurvenintegral entlang einer mit $\underline{\alpha}(t)$ parametrisierten Kurve C über das Vektorfeld $\underline{v}$ ist definiert als

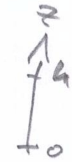
$$\int_C \underline{v} \cdot d\underline{s} := \int_a^b \underline{v}(\underline{\alpha}(t)) \cdot \dot{\underline{\alpha}}(t)\, dt ,$$

wobei $d\underline{s} = \dot{\underline{\alpha}}(t)\, dt$ der infinitesimale Tangentenvektor ist

Bsp.: mechanische Arbeit entlang eines Weges C

$$W = \int_C \underline{F} \cdot d\underline{s} \quad , \quad \underline{F} = -mg\, \hat{\underline{e}}_z \text{ und } \underline{\alpha} : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto h t \hat{\underline{e}}_z$$



(*) s. a. 3a

$$\Rightarrow W = \int_0^1 -mg\, \hat{\underline{e}}_z \cdot h\, \hat{\underline{e}}_z\, dt = -mgh \qquad \Rightarrow \dot{\underline{\alpha}} = h\, \hat{\underline{e}}_z$$

(3. Wegintegral über konservatives Vektorfeld

$\underline{v}$ konservativ $\Rightarrow \underline{v} = \underline{\nabla}\phi$, $\quad C$: Weg von $\underline{a}$ nach $\underline{b}$

$$\int_C \underline{v} \cdot d\underline{x} = \int_C \underbrace{(\underline{\nabla}\phi) \cdot d\underline{x}}_{d\phi} \quad ,$$

totales Differential:

$$d\phi(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\phi\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\phi\, dy + \frac{\partial}{\partial z}\phi\, dz$$

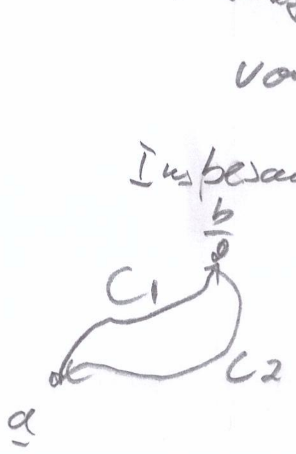
$$= (\underline{\nabla}\phi) \cdot d\underline{x}$$

$$= \int_C d\phi = \phi(\underline{b}) - \phi(\underline{a})$$

(Vgl.: $\int_a^b \frac{df}{dx}\, dx = f(b) - f(a)$)

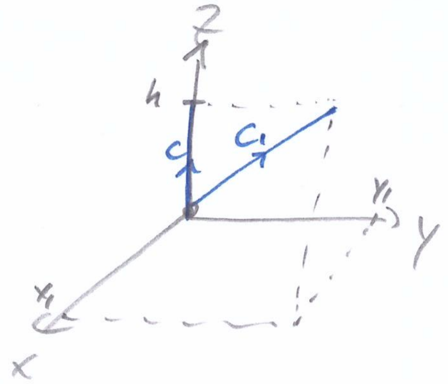
$\Rightarrow$ Wegintegral über konservativem Vektorfeld hängt nicht vom Weg ab!

Insbesondere: $\displaystyle \int_{C_1} \underline{v} \cdot d\underline{x} + \int_{C_2} \underline{v} \cdot d\underline{x} = \oint_{C = C_1 \cup C_2} \underline{v} \cdot d\underline{x}$



$$= \phi(\underline{b}) - \phi(\underline{a}) + \phi(\underline{a}) - \phi(\underline{b}) = 0$$

⊛ mechanische Arbeit entlang eines Weges C:



Parametrisierung von C: $\underline{\alpha}(t) = h\,t\,\hat{\underline{e}}_z\,,\ t \in [0,1]$

—— " —— C_1: $\underline{\beta}(t) = h\,t\,\hat{\underline{e}}_z + x_1 t\,\hat{\underline{e}}_x + y_1 t\,\hat{\underline{e}}_y$

$$W = \int_C \underline{F} \cdot d\underline{s} = \ldots = -mgh \quad (\text{s. S. 53})$$

$$W_1 = \int_{C_1} \underline{F} \cdot d\underline{s} = \int_0^1 (-mg)\,\hat{\underline{e}}_z \cdot \dot{\underline{\beta}}(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 dt\,(-mg)\Big[\hat{\underline{e}}_z \cdot h\,\hat{\underline{e}}_z + \underbrace{\hat{\underline{e}}_z \cdot x_1\hat{\underline{e}}_x}_{=0} + \underbrace{\hat{\underline{e}}_z \cdot y_1\hat{\underline{e}}_y}_{=0}\Big]$$

$\hat{\underline{e}}_z \perp \hat{\underline{e}}_x\,,\ \hat{\underline{e}}_z \perp \hat{\underline{e}}_y$

oder auch $\hat{\underline{e}}_i \cdot \hat{\underline{e}}_j = \delta_{ij}$

$$= \int_0^1 dt\,(-mg)\,h = -mgh = W$$

gilt auch für noch kompliziertere Wege von $z=0$ auf Höhe h.

4.2 Derivations of vector fields

(iii) Laplace - Operator: (a) $\Delta \phi := \text{div grad } \phi = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \phi)$ scalar field potential

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi$$

(b) $\Delta \underline{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\underline{A} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\underline{A} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\underline{A} \overset{?}{=} \text{grad div } \underline{A} - \text{rot rot } \underline{A}$

$$= \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{A}) - \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A})$$

- rot, grad, div : linear operators
- product rules: (a) $\text{div}(\phi \underline{v}) = \phi \text{ div } \underline{v} + (\text{grad } \phi) \cdot \underline{v}$

$$\underline{\nabla} \cdot (\phi \underline{v}) = \phi (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) + (\underline{\nabla} \phi) \cdot \underline{v}$$

(b) $\text{rot}(\phi \underline{A}) = \phi \text{ rot } \underline{A} + \text{grad } \phi \times \underline{A}$

$$= \phi (\underline{\nabla} \times \underline{A}) + (\underline{\nabla} \phi) \times \underline{A}$$

4.3 Gradient field and curl

Theorem: (i) Gradient fields have no curl

$$\underline{v} = \underline{\nabla}\phi \Rightarrow \text{rot } \underline{v} = \underline{0}$$

(ii) $\text{rot } \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{\nabla}\phi$

$\underline{v}$ conservative $\Leftrightarrow$ rot $\underline{v} = 0$

Theorem: (i) $\underline{v} = \text{rot } \underline{A} \Rightarrow$ no sink / no source ($\text{div } \underline{v} = 0$)

(ii) $\text{div } \underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{v} = \text{rot } \underline{A}$

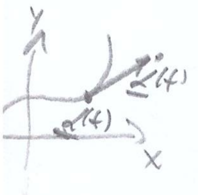
4.4 Raumkurven

Parametrisierung $\underline{\alpha}$ einer Raumkurve $C:[a,b]\to\mathbb{R}^n$

Def: Eine Raumkurve $\underline{\alpha}$ ist eine stetig differenzierbare Abbildung vom Intervall $I\subset\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$:

$$\underline{\alpha}: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \vdots \\ \alpha_n(t)\end{pmatrix}$$

Def: Die Ableitung $\dot{\underline{\alpha}}(t) := \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\underline{\alpha}(t+\Delta t)-\underline{\alpha}(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix}\dot{\alpha}_1(t)\\ \vdots \\ \dot{\alpha}_n(t)\end{pmatrix}$

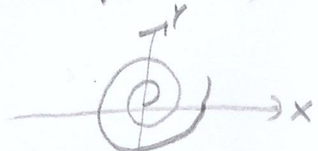


liefert den Tangentenvektor an die Kurve.

Def: Eine Raumkurve heißt regulär, wenn gilt: $\dot{\underline{\alpha}}(t)\neq\underline{0}\ \forall t\in I$.

Bsp.: (i) Archimedische Spirale (regulär für $t>0$)

$$t\longmapsto\begin{pmatrix}t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix}$$

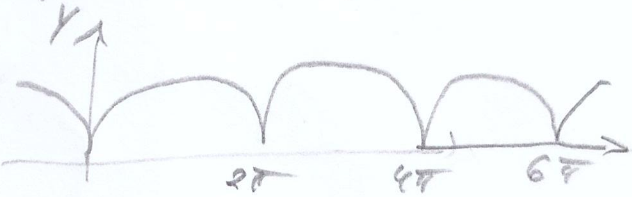


(ii) Schraubenlinie (regulär für $t\in\mathbb{R}$)

$$t\longmapsto\begin{pmatrix}R\cos t\\ R\sin t\\ h t\end{pmatrix}$$

(iii) Zykloide (nicht regulär für $t=0,\pm2\pi,\pm4\pi,\ldots$)

$$t\longmapsto\begin{pmatrix}t-\sin t\\ 1-\cos t\end{pmatrix}$$

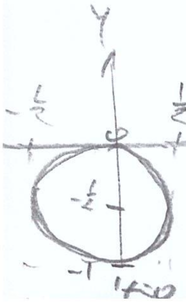


Punkt auf rollendem Rad

$$\dot{\underline{\alpha}}(t)=\begin{pmatrix}1-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\Rightarrow\dot{\underline{\alpha}}(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{ für } t=0,\pm2\pi,\pm4\pi,\ldots)$$

(iv) $\underline{\alpha}: t\longmapsto\left(\dfrac{t}{t^2+1},\ -\dfrac{1}{t^2+1}\right)$

Frage: Was beschreibt $\underline{\alpha}$?



$$\frac{x}{y}=-t\Rightarrow x=\frac{-\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2}+1}=\frac{x}{y\,\frac{x^2+y^2}{y^2}}=\frac{xy}{x^2+y^2}\Rightarrow x^2+y^2=y$$

$$\Rightarrow x^2+\left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4}\Rightarrow \text{Kreis mit Radius } \tfrac{1}{2} \text{ um } \left(0,-\tfrac{1}{2}\right).$$

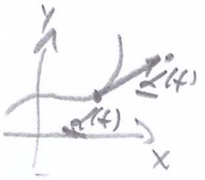
4.4 Raumkurven

Parametrisierung α einer Raumkurve $C:[a,b]\to\mathbb{R}^n$

Def: Eine Raumkurve α ist eine stetig differenzierbare Abbildung vom Intervall $I\subset\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$:

$$\alpha: I \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \vdots \\ \alpha_n(t)\end{pmatrix}$$

Def: Die Ableitung $\dot{\underline{\alpha}}(t) := \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\underline{\alpha}(t+\Delta t)-\underline{\alpha}(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix}\dot\alpha_1(t)\\ \vdots \\ \dot\alpha_n(t)\end{pmatrix}$



liefert den Tangentenvektor an die Kurve.

Def: Eine Raumkurve heißt regulär, wenn gilt: $\dot{\underline{\alpha}}(t) \neq \underline{0}\ \forall\, t\in I$.

Bsp.: (i) Archimedische Spirale (regulär für $t>0$)

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t\end{pmatrix}$$

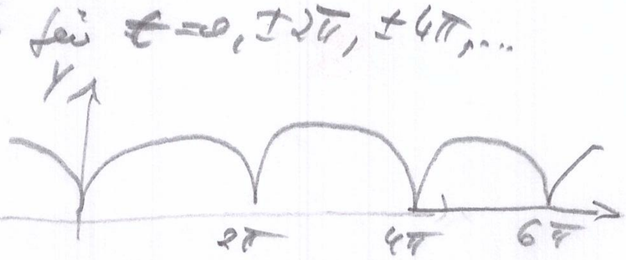
(ii) Schraubenlinie (regulär für $t\in\mathbb{R}$)

$$t \mapsto \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ h t\end{pmatrix}$$

(iii) Zykloide (nicht regulär für $t=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t-\sin t \\ 1-\cos t\end{pmatrix}$$

Punkt auf rollendem Rad



$$\dot{\underline{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t\end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ für } t=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots)$$

(iv) $$\underline{\alpha}: t \longmapsto \left(\frac{t}{t^2+1},\ -\frac{1}{t^2+1}\right)$$

Frage: Was beschreibt $\underline{\alpha}$?

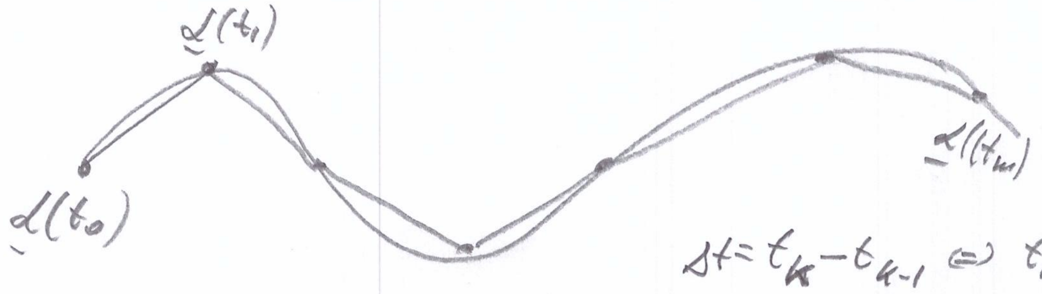
$$\frac{x}{y} = -t \Rightarrow x = \frac{-\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2}+1} = \frac{x}{y\,\frac{x^2+y^2}{y^2}} = \frac{xy}{x^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2 = y$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} \Rightarrow \text{Kreis mit Radius } \tfrac{1}{2} \text{ um } \left(0, \tfrac{1}{2}\right).$$

4.5 Bogenlänge

Frage: Länge eines Kurvenstücks C? $(\underline{\alpha}:[a,b] \to C \subset \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \underline{\alpha}(t))$

Idee: Näherung durch Polygonzug / Sehnenpolygone



$\Delta t = t_k - t_{k-1} \Leftrightarrow t_k = t_{k-1} + \Delta t$

$$\Rightarrow L_m = \sum_{k=1}^{m} \left| \underline{\alpha}(t_k) - \underline{\alpha}(t_{k-1}) \right| \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\underline{\alpha}(t_k) - \underline{\alpha}(t_{k-1})}{\Delta t} \right| \Delta t$$

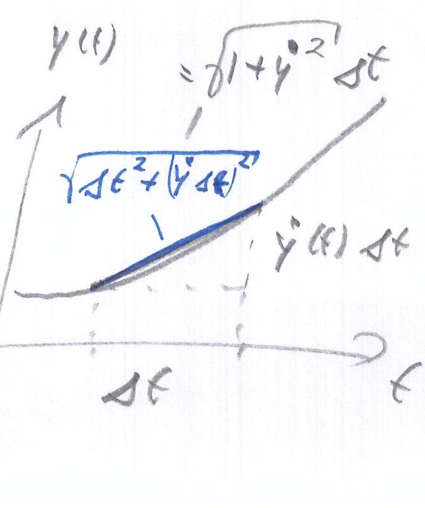
$$\underset{\Delta t \text{ klein}}{\approx} \sum_{k=1}^{m} \left| \dot{\underline{\alpha}}(t_{k-1}) \right| \Delta t$$

Satz: Für eine stetig differenzierbare Parametrisierung $\underline{\alpha}(t)$ der Kurve C $(\underline{\alpha}:[a,b] \to \mathbb{R}^n)$ gilt für die Länge von C:

$$L(C) = \int_a^b |\dot{\underline{\alpha}}(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}_i(t)^2}\, dt$$

Bsp.: $\underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow L(C) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{y}(t)^2}\, dt$$

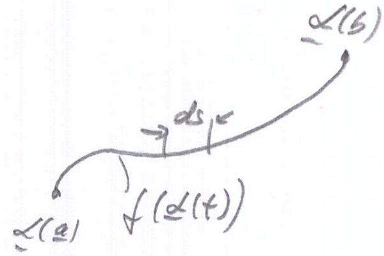


4.6 Wegintegrale

(1. Skalares Wegintegral : bezieht sich auf Integrand (Skalarfeld)

Def.: Das **Skalare Weg-/Kurvenintegral** von $f: \underline{x} \mapsto f(\underline{x})$ über eine Kurve $C: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \underline{\alpha}(t)$ ist definiert als

$$\int_C f(\underline{x})\, ds := \int_a^b f(\underline{\alpha}(t))\ |\dot{\underline{\alpha}}(t)|\, dt$$



mit dem **Bogenelement** $ds = |\dot{\underline{\alpha}}(t)|\, dt$.

Bsp.: (i) Länge einer Kurve ($\to$ 4.5): $f(\underline{x}) = 1$.

(ii) Kreisförmiger Draht um Ursprung mit Radius R und Längendichte ϱ (Masse pro Länge).

Frage: (a) Gesamtmasse

(b) Schwerpunkt

Idee: **Parametrisierung** der Drahtschleife $C: t \mapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow |\dot{\underline{\alpha}}(t)| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R$$

(a) $$M = \int_C dm = \int_C \varrho\, ds = \int_0^{2\pi} \varrho\ R\, dt = 2\pi R \varrho$$

(b) $$\underline{R}_s = \frac{1}{M} \int_C \underline{r}\, dm = \frac{1}{M} \int_C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dm$$

$\hookrightarrow$ x-Koordinate: $$X_s = \frac{1}{M} \int_C x\, dm = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} R\cos t\ \ \varrho R\, dt = 0 \qquad (Y_s \text{ analog})$$

alternativ: $\underline{\alpha}(s) = R\begin{pmatrix} \cos 2s \\ \sin 2s \end{pmatrix}$ mit $s \in [0, \pi) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (X_s, Y_s) = (0,0)$

Kettenregel (...) als Substitution ...

2. vektorielle Wegintegrale (Integrand : Vektorfeld)

Def.: Das **vektorielle Weg-/Kurvenintegral** entlang einer mit $\underline{\alpha}(t)$ parametrisierten Kurve C über das Vektorfeld $\underline{v}$ ist definiert als

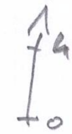
$$\int_C \underline{v} \cdot d\underline{s} := \int_a^b \underline{v}(\underline{\alpha}(t)) \cdot \dot{\underline{\alpha}}(t)\, dt ,$$

wobei $d\underline{s} = \dot{\underline{\alpha}}(t)\,dt$ der infinitesimale Tangentenvektor ist

Bsp.: mechanische Arbeit entlang eines Weges C

$$W = \int_C \underline{F} \cdot d\underline{s} \quad , \quad \underline{F} = -mg\,\hat{\underline{e}}_z \text{ und } \underline{\alpha} : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \underbrace{h t \hat{\underline{e}}_z}$$

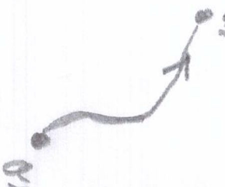


(*) s.a. 3a

$$\Rightarrow W = \int_0^1 -mg\,\hat{\underline{e}}_z \cdot h\,\hat{\underline{e}}_z\,dt = -mgh \qquad \Rightarrow \dot{\underline{\alpha}} = h\,\hat{\underline{e}}_z$$

3. Wegintegral über konservatives Vektorfeld

$\underline{v}$ konservativ $\Rightarrow \underline{v} = \nabla\phi$, $\quad C$: Weg von $\underline{a}$ nach $\underline{b}$



$$\int_C \underline{v} \cdot d\underline{x} = \int_C \underbrace{(\nabla\phi) \cdot d\underline{x}}_{d\phi} \quad ,$$

totales Differential:

$$d\phi(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\phi\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\phi\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\phi\,dz$$

$$= (\nabla\phi) \cdot d\underline{x}$$

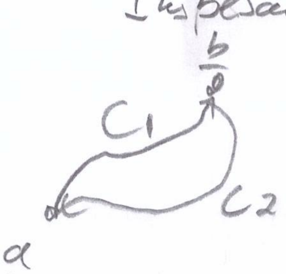
$$= \int_C d\phi = \phi(\underline{b}) - \phi(\underline{a})$$

$$\left(\text{vgl.: } \int_a^b \frac{df}{dx}\,dx = f(b) - f(a)\right)$$

$\Rightarrow$ Wegintegral über konservativem Vektorfeld hängt nicht vom Weg ab!

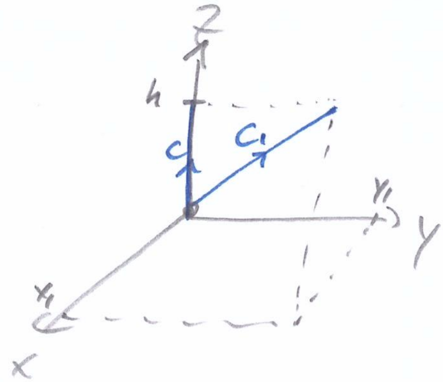
Insbesondere:

$$\int_{C_1} \underline{v} \cdot d\underline{x} + \int_{C_2} \underline{v} \cdot d\underline{x} = \oint_{C = C_1 \cup C_2} \underline{v} \cdot d\underline{x}$$



$$= \phi(\underline{b}) - \phi(\underline{a}) + \phi(\underline{a}) - \phi(\underline{b}) = 0$$

⊛ mechanische Arbeit entlang eines Weges C:



Parametrisierung von C: $\underline{\alpha}(t) = ht\,\hat{\underline{e}}_z$, $t \in [0,1]$

——— " ——— C_1: $\underline{\beta}(t) = ht\,\hat{\underline{e}}_z + x_1 t\,\hat{\underline{e}}_x + y_1 t\,\hat{\underline{e}}_y$

$$W = \int_C \underline{F} \cdot d\underline{s} = \ldots = -mgh \quad (\text{s. S. 53})$$

$$W_1 = \int_{C_1} \underline{F} \cdot d\underline{s} = \int_0^1 (-mg)\,\hat{\underline{e}}_z \cdot \dot{\underline{\beta}}(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 dt\,(-mg)\Big[\hat{\underline{e}}_z \cdot h\,\hat{\underline{e}}_z + \underbrace{\hat{\underline{e}}_z \cdot x_1\,\hat{\underline{e}}_x}_{=0} + \underbrace{\hat{\underline{e}}_z \cdot y_1\,\hat{\underline{e}}_y}_{=0}\Big]$$

$\hat{\underline{e}}_z \perp \hat{\underline{e}}_x$, $\hat{\underline{e}}_z \perp \hat{\underline{e}}_y$

oder auch $\hat{\underline{e}}_i \cdot \hat{\underline{e}}_j = \delta_{ij}$

$$= \int_0^1 dt\,(-mg)\,h = -mgh = W$$

gilt auch für noch kompliziertere Wege von $z=0$ auf Höhe h.

4.4 (Parameterization of) curves

- curve C (set of points in $\mathbb{R}^n$): parameterized by a function

$$\underline{\alpha} : \underbrace{[a,b]}_{I} \rightarrow \mathbb{R}^n \, , \; t \mapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}$$

- Derivative: $\dot{\underline{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\alpha}_n(t) \end{pmatrix}$ vector tangential on curve C at $\underline{\alpha}(t)$

- regular curve: $\dot{\underline{\alpha}}(t) \neq \underline{0} \quad \forall t \in I$

4.5 Length of a curve

- length of C: $L(C) := \int_a^b |\dot{\underline{\alpha}}(t)| \, dt$

4.5 Integration along curves

- scalar $\left(\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \underline{x} \mapsto f(\underline{x}) \end{array} \right)$: $\int_C f(\underline{x}) \, ds = \int_a^b f(\underline{\alpha}(t)) |\dot{\underline{\alpha}}(t)| \, dt$

- vectorial $\left(\begin{array}{l} \underline{v}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \underline{x} \mapsto \underline{v}(\underline{x}) \end{array} \right)$: $\int_C \underline{v}(\underline{x}) \cdot d\underline{s} = \int_a^b \underline{v}(\underline{\alpha}(t)) \cdot \dot{\underline{\alpha}}(t) \, dt$

4.7 Parametrisierung von Flächen

Hier: Flächen im $\mathbb{R}^3$

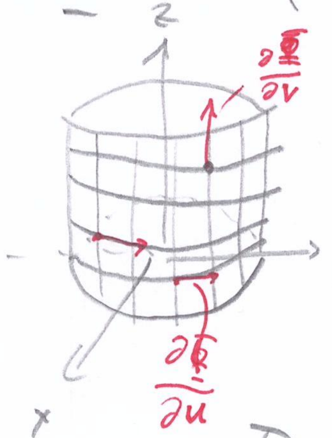
Def: Die **Parametrisierung einer Fläche** F im $\mathbb{R}^3$ ist eine stetig differenzierbare Abbildung von einem zusammenhängenden Gebiet $B \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$: $\underline{\Phi}$

etwa $\underbrace{[a,b]}_{\partial u} \times \underbrace{[c,d]}_{\partial v}$

$$\underline{\Phi}: B \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \underline{x} = \underline{\Phi}(u,v)$$

Bsp: (i) Kreiszylinder mit z-Achse als Symmetrieachse

$$\underline{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R \sin u \\ v \end{pmatrix}, \quad \left.\begin{array}{l} 0 \le u < 2\pi \\ v \in \mathbb{R} \end{array}\right\} B = [0,2\pi) \times \mathbb{R}$$



$\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial u}, \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial v}$: **Tangentenvektoren**

(linear unabhängig!)

häufig abgekürzt als $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$

(ii) Ebene: $\underline{\Phi}(u,v) = \underline{a} + u\underline{b} + v\underline{c}$, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ const

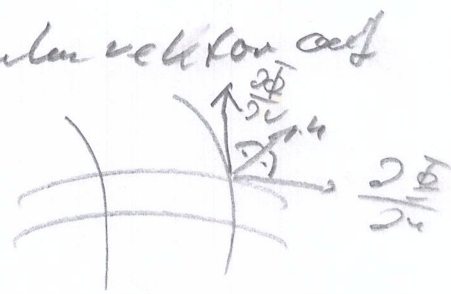
$u, v \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \underline{b} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial u}, \quad \underline{c} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial v}$

$\Rightarrow$ Tangentenvektoren liefern den Normalenvektor auf $\underbrace{\text{der Fläche}}_{\text{ggf. gekrümmten}}$

$$\underline{n} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial v}$$



4.8 Flächenintegrale

1. Skalare Funktionen:

Def.: Das (skalare) Oberflächenintegral einer skalaren Funktion f über die von Φ parametrisierte Fläche F ist definiert als:

$\underbrace{(u,v)}_{\in B} \mapsto \underline{x} = \Phi(u,v)$

$$\int_F f(\underline{x})\, dA := \int_B f(\underline{x}(u,v)) \underbrace{\left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}\right| du\, dv}_{\text{Oberflächenelement}}$$

Bsp.: Fläche der Kugel mit Radius R: $4\pi R^2$

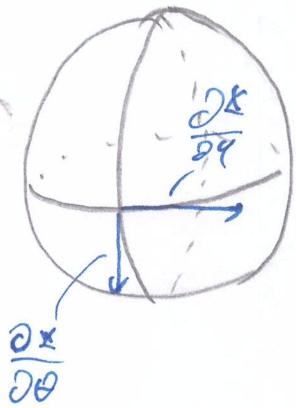
Parametrisierung durch Kugelkoordinaten (s. 2.9.2)

$$\Phi : (\theta, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{mit } \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow B = [0,\pi] \times [0, 2\pi)$$

$\Rightarrow$ Oberflächenelement:

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \ldots =$$



$$= R^2\sin\theta \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ (\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1})\cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{Länge} = 1}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}\right| = R^2 \sin\theta$$

$$\Rightarrow dA = \left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}\right| d\theta\, d\varphi = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Rightarrow \text{Oberfläche Kugel} = \int dA = \int_B \left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}\right| d\theta\, d\varphi$$

Kugeloberfläche

$$= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, R^2 \sin\theta = 2\pi R^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta = 4\pi R^2$$

4.7 Parametrization of areas

$[a,b] \times [c,d]$

- area F : parametrized by $\underline{\Phi} : B \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \underline{x} = \underline{\Phi}(u,v)$$

- tangential vectors: $\dfrac{\partial \underline{\Phi}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \underline{\Phi}}{\partial v}$

$$\left| \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial v} \right|$$

4.8 Integration over areas

- scalar $\begin{pmatrix} f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ \underline{x} \mapsto f(\underline{x}) \end{pmatrix}$: $\displaystyle\int_F f(\underline{x})\,dA = \int_B f(\underbrace{\underline{x}(u,v)}_{\underline{\Phi}(u,v)}) \, \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| du\,dv$

- recap: spherical coordinates: $r = R$

$$\underline{\Phi} : (\theta, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} R \sin\theta \cos\varphi \\ R \sin\theta \sin\varphi \\ R \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0,\pi], \ \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow B = [0,\pi] \times [0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} R \cos\theta \cos\varphi \\ R \cos\theta \sin\varphi \\ -R \sin\varphi \end{pmatrix} = R \, \underline{\vec{e}}_\theta$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin\theta \sin\varphi \\ R \sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = R \sin\theta \, \underline{\vec{e}}_\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \ldots = R^2 \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = R^2 \sin\theta \, \underline{\vec{e}}_r$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \right| = \ldots = R^2 \sin\theta$$

- $\{ \underline{\vec{e}}_\theta, \underline{\vec{e}}_\varphi, \underline{\vec{e}}_r \}$: orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$ (equivalent to $\underline{\vec{e}}_x, \underline{\vec{e}}_y, \underline{\vec{e}}_z$

Bemerkung: (i) Die Parametrisierung der Kugel liefert auch die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten und somit eine Basis $\{\underline{\vec{e}}_r, \underline{\vec{e}}_\theta, \underline{\vec{e}}_\varphi\}$ (sogar Orthonormalbasis)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = r\underline{\vec{e}}_\theta$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = r \sin\theta \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = r\sin\theta\, \underline{\vec{e}}_\varphi$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = r^2 \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = r^2 \sin\theta\, \underline{\vec{e}}_r$$

(ii) Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten: $\{e$

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \underline{x}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\vec{e}}_\rho$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \rho \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \rho\, \underline{\vec{e}}_\varphi$$

$$= \frac{\partial \underline{x}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\vec{e}}_z = \underline{\vec{e}}_\rho \times \underline{\vec{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

2. Vektorfelder:

Def: Das (vektorielle) Flussintegral eines Vektorfeldes $\underline{V}$ über die durch $\underline{\Phi}: B \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto \underline{x} = \underline{\Phi}(u,v)$ parametrisierte Fläche F ist definiert als

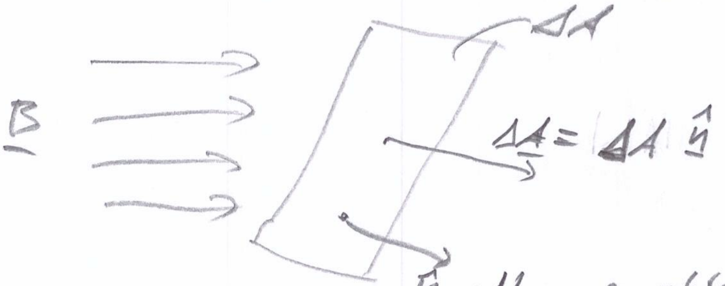
$$\int_F \underline{v}(\underline{x}) \cdot d\underline{A} := \int_B \underline{v}(\underline{x}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right) du\, dv$$

mit dem vektoriellen Oberflächenelement $d\underline{A} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}\, du\, dv$.

hat Richtung!

Achtung: nicht verwechseln mit Parametrisierung $\underline{\Phi}$

Bsp.: (i) Magnetischen Fluss $\Delta\underline{\Phi}$ durch Fläche ΔA

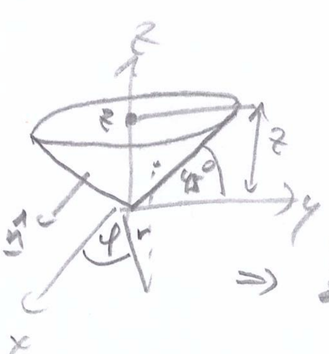


$\underline{\hat{n}}$: Normalenvektor (kann Richtung ändern bei gekrümmten Flächen)

$\Rightarrow$ Gesamtfluss durch Fläche F:

$$\underline{\Phi} = \int_F d\underline{\Phi} = \int_F \underline{B} \cdot \underline{\hat{n}}\, dA = \int_F \underline{B} \cdot d\underline{A}$$

(ii) Fluss von $\underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 \\ x^2 y + y^3 \\ x^2 y \end{pmatrix}$ durch $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| z = \sqrt{x^2+y^2},\ z < 2 \right\}$



Parametrisierung von F: $(r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}$, $r \in [0,2]$, $\varphi \in [0,2\pi]$

$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = r \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}(r,\varphi)) = r^3 \begin{pmatrix} \cos^3\varphi + \cos\varphi \sin^2\varphi \\ \cos^2\varphi \sin\varphi + \sin^3\varphi \\ \cos^2\varphi \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{v}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\times\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \dots = r^4\left(1-\cos^2\varphi\sin\varphi\right)$$

$$r^4\left(\cos\varphi(\cos^3\varphi+\cos\varphi\sin^2\varphi)+\sin\varphi(\cos^2\varphi\sin\varphi+\sin^3\varphi)-\cos^2\varphi\sin\varphi\right)$$

$$= r^4\left(\cos^4\varphi+\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi-\cos^2\varphi\sin\varphi\right)$$

$$= r^4\left(\underbrace{\cos^2(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1})+\sin^2\varphi(\underbrace{\cos^2+\sin^2\varphi}_{=1})}_{=1}-\cos^2\varphi\sin\varphi\right)$$

$$= r^4\left(1-\cos^2\varphi\sin\varphi\right)$$

$$\Rightarrow \int_F \underline{v}\cdot d\underline{f} = \int_0^2 dr\int_0^{2\pi} d\varphi\; r^4\left(1-\cos^2\varphi\sin\varphi\right)$$

$$= \int_0^2 r^4\,dr\int_0^{2\pi} d\varphi\left(\underbrace{1-\cos^2\varphi\sin\varphi}_{=1-(1-\sin^2\varphi)\sin\varphi=1-\sin\varphi+\sin^3\varphi}\right)$$

$$= \dots = \frac{64}{5}\pi$$

4.9 Satz von Gauß

Satz: Für ein Flussintegral eines C^1-Vektorfeldes $\underline{v}: \underline{x} \longmapsto \underline{v}(\underline{x})$ über den Rand/die Oberfläche ∂V eines Volumens V gilt:

$$\int_{\partial V} \underline{v}\cdot d\underline{A} = \int_V \operatorname{div}\underline{v}\; dV.$$

Bem:
- Funktionswerte auf Oberfläche ∂V $\Leftrightarrow$ Quellen im Innern (div)
- Notation: Integral über geschlossene Fläche $\int_{\partial V} \to \oint_{\partial V}$
- Elektrostatik: $\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ (ρ: Ladungsdichte)

  differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes der Elektrostatik

$$\Rightarrow \int_V \underline{\nabla}\cdot\underline{E}\; dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\int_V \rho\, dV}_{Q_{innen}} \quad : \text{Ladung in } V$$

Satz v. Gauß

$$\Rightarrow \int_{\partial V} \underline{E}\cdot d\underline{A} = \frac{Q_{innen}}{\varepsilon_0} \quad \text{(integrale Schreibweise)}$$

Idee: (i) Betrachte kleinen Würfel $\underline{X}_W$ mit Volumen ΔV und Oberfläche ∂V $\Rightarrow$ Der Fluss von $\underline{v}$ aus Würfel:

$$\int_{\partial V} \underline{v}\cdot d\underline{A} \approx \operatorname{div}\underline{v}(\underline{x}_W)\,\Delta V \quad (\underline{v} \approx \text{const. im Würfel})$$

(ii) Betrachte zusammenhängendes Volumen

Teilvolumen V_i mit Rand ∂V_i am Ort $\underline{x}_i$

Der Fluss aus V ist die Summe der Flüsse aus den Teilvolumina V_i am Rand ∂V_i, weil sich die Flüsse im Innern aufheben.

$$\int_{\partial V} \underline{v}\cdot d\underline{A} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial V_i} \underline{v}\cdot d\underline{A} \approx \sum_{i=1}^{n} \operatorname{div}\underline{v}(\underline{x}_i)\,\Delta V_i \xrightarrow[\substack{\Delta V_i \to 0 \\ n\to\infty}]{} \int_V \operatorname{div}\underline{v}(\underline{x})\,dV$$

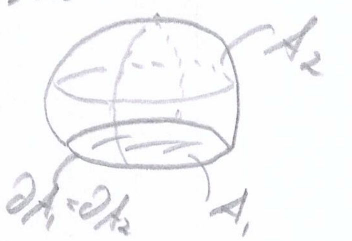
4.10 Satz von Stokes

Satz: Für ein Wegintegral eines C^1-Vektorfeldes $\underline{v}: \underline{x} \mapsto \underline{v}(\underline{x})$ über den Rand ∂F einer Fläche F gilt:

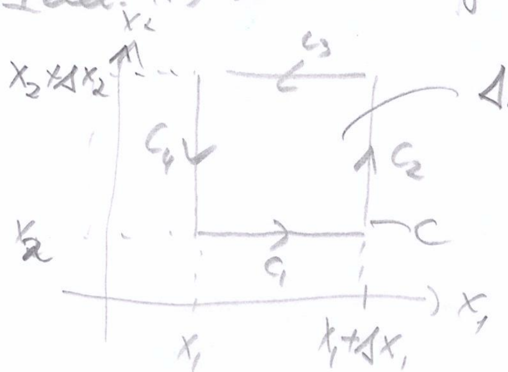
$$\int_{\partial F} \underline{v}\cdot d\underline{s} = \int_{F} \operatorname{rot}\underline{v}\cdot d\underline{A}.$$

Bem:
- Notation: ∂F ist geschlossener Weg: $\oint_{\partial F}$
- Funktionswerte auf Flächenrand ∂F $\Leftrightarrow$ Wirbel auf Fläche
- Flächenintegral $\int_F \operatorname{rot}\underline{v}\cdot d\underline{A}$ hängt nur vom Rand ∂F ab:

$$\int_{F_1} \operatorname{rot}\underline{v}\cdot d\underline{A} = \int_{F_2} \operatorname{rot}\underline{v}\cdot d\underline{A}$$



Idee: (i) Betrachte geschlossenen Weg in (x_1, x_2)-Ebene



$\Delta A = \Delta x_1 \Delta x_2$

$$\oint_C \underline{v}\cdot d\underline{s} = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_i} \underline{v}\cdot d\underline{s}$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung (5.1.12)

$\varepsilon_1 \in (0, \Delta x_1)$

$$\int_{C_1} \underline{v}\cdot d\underline{s} + \int_{C_3} \underline{v}\cdot d\underline{s} = v_1(x_1+\varepsilon_1; x_2)\,\Delta x_1 - v_1(x_1+\varepsilon_1, x_2+\Delta x_2)\,\Delta x_1$$

$$= -\underbrace{\frac{v_1(x_1+\varepsilon_1, x_2+\Delta x_2) - v_1(x_1+\varepsilon_1, x_2)}{\Delta x_2}}\,\Delta x_1 \Delta x_2$$

$$\underset{\substack{\Delta x_1 \to 0 \text{ also } \varepsilon_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}}{\approx} -\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_1, x_2)\,\Delta x_1 \Delta x_2$$

$\varepsilon_2 \in (0, \Delta x_2)$

$$\int_{C_2} \underline{v}\cdot d\underline{s} + \int_{C_4} \underline{v}\cdot d\underline{s} = v_2(x_1+\Delta x_1, x_2+\varepsilon_2)\,\Delta x_2 - v_2(x_1, x_2+\varepsilon_2)\,\Delta x_2$$

$$= \underbrace{\frac{v_2(x_1+\Delta x_1, x_2+\varepsilon_2) - v_2(x_1, x_2+\varepsilon_2)}{\Delta x_1}}_{\Delta x_1 \to 0,\ \Delta x_2 \to 0,\ \varepsilon_2 \to 0}\,\Delta x_1 \Delta x_2$$

$$\approx \frac{\partial v_2}{\ldots}\,\Delta x_1 \Delta x_2$$

$$\Rightarrow \int_C \underline{v} \circ d\underline{s} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \Delta x_1 \Delta x_2$$

$$= \underbrace{(\mathrm{rot}\, \underline{v})_3}_{\text{Anteil von rot } \underline{v} \text{ in Richtg Flächennormale}} \quad \underbrace{\Delta x_1 \Delta x_2}_{\text{eingeschlossene Fläche}}$$

(ii) Betrachte Wegintegral entlang ∂F:

Teilfläche F_i mit Rand ∂F_i am Ort $\underline{x}_i$ und Flächennormalen $\hat{\underline{n}}_i$.

Wegintegral entlang ∂F ist Summe der Wegintegrale um F_i am Rand, weil sich Wegintegrale im Innern aufheben:

$$\oint_{\partial F} \underline{v} \circ d\underline{s} = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\partial F_i} \underline{v} \circ d\underline{s}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rot}\, \underline{v}(\underline{x}_i) \circ \hat{\underline{n}}_i \underbrace{\Delta x_1 \Delta x_2}_{= \Delta A_i}$$

$$\xrightarrow[\substack{n \to \infty \\ \Delta A_i \to 0}]{} \int_F \mathrm{rot}\, \underline{v}(\underline{x}) \circ d\underline{A}$$

Parametrization using, e.g., spherical coordinates:

$$\underline{\Phi}: (\theta, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} R \sin\theta \cos\varphi \\ R \sin\theta \sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0, 2\pi)$$

$\hookrightarrow B = [0,\pi] \times [0, 2\pi)$

$\hookrightarrow$ unit vectors: $\{\hat{\underline{e}}_\theta, \hat{\underline{e}}_\varphi, \hat{\underline{e}}_r\}$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\underline{e}}_\theta &= \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} \\ \hat{\underline{e}}_\varphi &= \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\underline{e}}_r &= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

derived via $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}$ and normalization

surface/area element: $\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \right| = R^2 \sin\theta$

4.8 Integration over areas

Surface integral of vectorfields: $\underline{\Phi}: B \to \mathbb{R}^3, (u,v) \mapsto \underline{x} = \underline{\Phi}(u,v)$

$$\int_F \underline{v}(\underline{x}) \cdot d\underline{A} := \int_B \underline{v}(\underline{x}(u,v)) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right) du\, dv}_{d\underline{A}}$$

4.9 Gauss's theorem (Divergence theorem)

$$\int_{\partial V} \underline{v} \cdot d\underline{A} = \int_V \underbrace{\operatorname{div} \underline{v}}_{\underline{\nabla} \cdot \underline{v}}\, dV$$

flux through closed surface $\leftrightarrow$ divergences (sources) of field enclosed

4.10 Stoke's theorem

$$\int_{\partial F} \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_F \underbrace{\operatorname{rot} \underline{v}}_{\underline{\nabla} \times \underline{v}} \cdot d\underline{A}$$

line integral around boundary $\leftrightarrow$ curl over surface

4.11 Partielle Integration

- Erinnerung: skalare Funktion: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

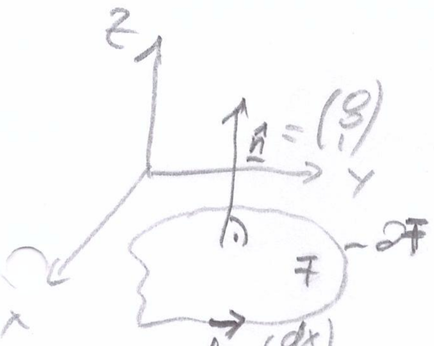
$$\int_a^b f'g \, dx = fg \Big|_a^b - \int_a^b f g' \, dx$$

- Für Felder (skalar: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vektoriell: $\underline{v} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$) gilt:

$$\int_V \underbrace{\underline{\nabla} \cdot (f \underline{v})}_{\mathrm{div}(f\underline{v})} \, dV \overset{(\text{Kap. } 4.2)}{=} \int_V \underbrace{(\underline{\nabla} f)}_{\mathrm{grad} f} \cdot \underline{v} \, dV + \int_V f \, (\underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{v}}_{\mathrm{div}\, \underline{v}}) \, dV$$

$$\underset{\text{Satz v. Gauß}}{\Rightarrow} \quad \int_V (\underline{\nabla} f) \cdot \underline{v} \, dV = \underbrace{\int_{\partial V} f \underline{v} \cdot d\underline{A}}_{\text{Randterm}} - \int_V f \, (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) \, dV$$

4.12 Satz von Green



F: Fläche in (xy)-Ebene

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \\ v_z \end{pmatrix} \quad C^1\text{-Vektorfeld}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial F} f(x,y) \, dx + g(x,y) \, dy = \int_B \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \, dy$$

s. Übungsblatt 9

5. Komplexe Zahlen

5.1 Definitionen & formales Rechnen

5.2 Graphische Darstellung in komplexer Ebene

5.3 komplexe Exponentialfunktion

5.1 Definitionen & formales Rechnen

Recap: (i) natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$+, \cdot$: $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a+b,\ a \cdot b \in \mathbb{N}$, aber kein Inverses

(ii) ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

↳ Inverses Element bzgl. Addition, aber nicht Multiplikation

(iii) rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$

↳ Inverses Element bzgl. Multiplikation

↳ Grenzwert konvergenter Reihen ggf. nicht in $\mathbb{Q}$

(iv) reelle Zahlen $\mathbb{R}$

↳ Abschluss von $\mathbb{Q}$ durch irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}, \pi, e \dots$

↳ nicht alle Polynome in Linearfaktoren zerlegbar:

$x^2 + 1 = 0$ nicht in $\mathbb{R}$ lösbar

Idee: imaginäre Einheit $i^2 := -1$ (häufig eingeführt als $i = \sqrt{-1}$ aber Vorsicht!)

$\Rightarrow$ Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} := \{ z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

Realteil $a = \mathrm{Re}(z)$, Imaginärteil $b = \mathrm{Im}(z)$

$\Rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

4.11 Integration by parts

recap: $\int_a^b f'g\,dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg'\,dx \quad , f,g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

For scalar fields $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and vector fields $\underline{v}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

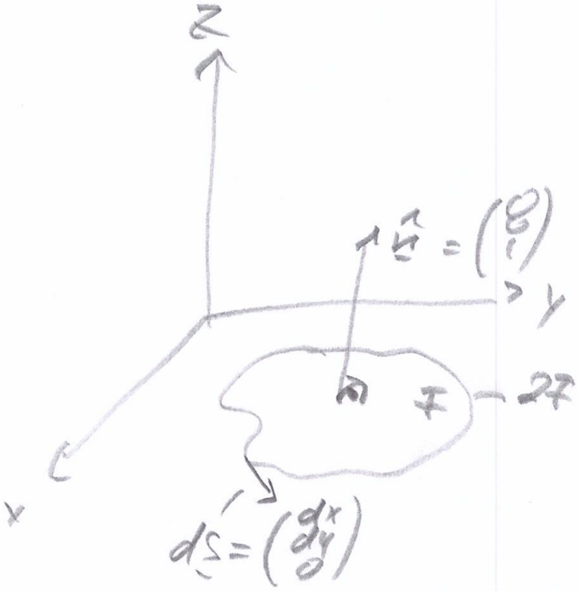
$$\int_V (\underline{\nabla} f) \cdot \underline{v}\, dV = \int_{\partial V} f\underline{v} \cdot d\underline{A} - \int_V f(\underline{\nabla} \cdot \underline{v})\, dV$$

4.12 Green's theorem

F: plane region (surface in $\mathbb{R}^2$) $\Rightarrow$ normal vector $\underline{\hat{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v}$: C^1 vector field with $\underline{v} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \\ v_z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \int_{\partial F} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \int_B \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx\,dy$$



5 Complex numbers

hierarchy of sets of numbers:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

add inverse of "+" | add inverse of "·" | convergence of all series | factorization of all polynomials

Rechenregeln:

(i) Addition: $\underbrace{(a+ib)}_{z_1} + \underbrace{(c+id)}_{z_2} = \underbrace{(a+b)}_{Re(z_1+z_2)} + i\,\underbrace{(c+d)}_{Im(z_1+z_2)}$ $\quad i^2=-1$

(ii) Multiplikation: $(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$

(iii) Komplex konjugierte Zahl $z^* \equiv \bar{z} = a - ib$

$\hookrightarrow Re(z) = \frac{1}{2}(z+z^*)\quad , Im(z) = \frac{1}{2i}(z-z^*)$

(iv) Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$

(v) Betrag: $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{zz^*}$

Bsp: Löse $x^2+2x+2=0$

quadratische ergänzen:

$x^2+2x+1-1+2=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = -1$

$\Leftrightarrow x+1 = \pm i$

$\Rightarrow x_{1,2} = -1 \pm i$

pq-Formel:

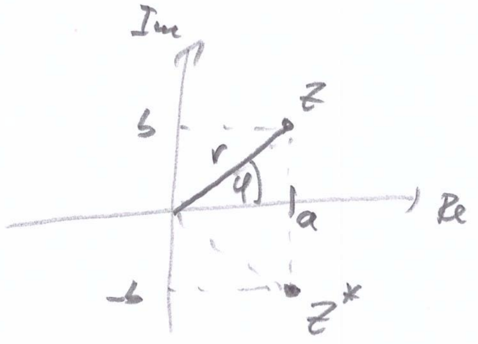
$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 2}$

$= -1 \pm \sqrt{-1}$

$= -1 \pm i$

5.2 Graphische Darstellung in komplexer Ebene

Idee: $x = Re(z)$, $y = Im(z)$ $\Rightarrow$ Polardarstellung



$$\left.\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ Re\, z = r\cos\varphi \\ Im\, z = r \sin\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow z = \underset{\text{Betrag}}{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Betrag   Phase $\varphi = \arg(z)$

Achtung: $\varphi \longrightarrow \varphi + n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ liefert die gleiche komplexe Zahl

$\Rightarrow$ nicht eindeutig

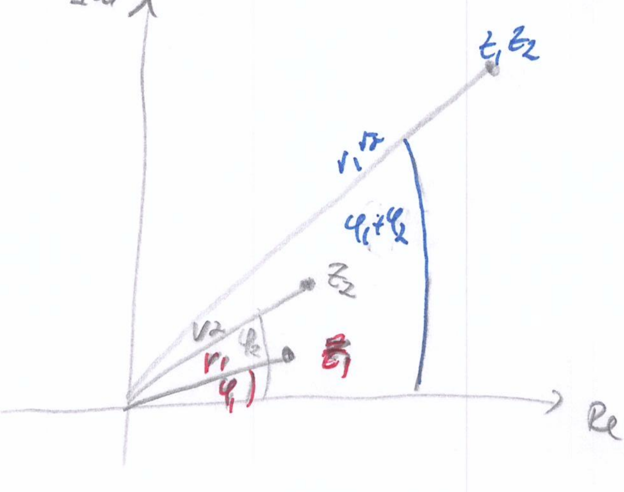
iii) $r \neq 0$: z reell $\Leftrightarrow$ $\varphi = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

Multiplikation: $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 \Big[\underbrace{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \overset{i^2}{-} \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i\underbrace{(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}\Big]$$

$$= r_1 r_2\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

Beträge multiplizieren sich   Phasen addieren sich



Damit lässt sich der vermeintliche Widerspruch für $i = \sqrt{-1}$ auflösen:

$-1 = i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$

$i = 0 + i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow i^2 = i\, i = 1\cdot 1(\underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{=0})$

$= -1$

5.3 Komplexe Exponentialfunktion

Idee: Definiere die komplexe Exponentialfunktion über ihre Potenzreihe:

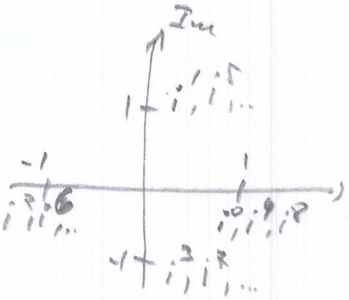
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$\hookrightarrow$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Beweis: $e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n y^n$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
i^n	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1



$$= \underbrace{1 - \frac{1}{2!} y^2 + \frac{1}{4!} y^4 - \frac{1}{6!} y^6 + \frac{1}{8!} y^8 \mp \ldots}_{\cos y}$$

$$+ i \underbrace{\left(y - \frac{1}{3!} y^3 + \frac{1}{5!} y^5 - \frac{1}{7!} y^7 + \ldots \right)}_{\sin y}$$

(vgl. Tut 8 Aufg 3)

Eulersche Formel: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi \quad , \varphi \in \mathbb{R}$

- $e^{i\pi} = -1 \quad , |e^{i\varphi}| = 1 \quad (|e^z| = e^x), \quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

  vgl. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

- Polardarstellung: $z = r e^{i\varphi}$

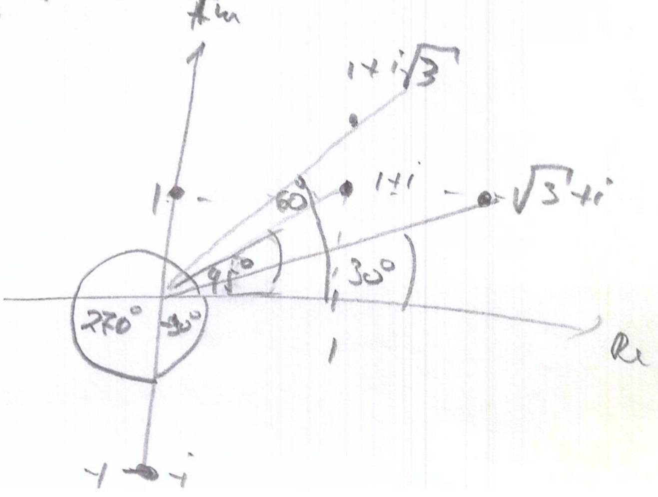
  $\hookrightarrow z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Bsp.: $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$-i = e^{-\frac{\pi}{2} i} = e^{\frac{3\pi}{2} i}$

$\sqrt{3} + i = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$

$1 + i\sqrt{3} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$



• Komplexer Logarithmus:

$$z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + n2\pi)} \Rightarrow \ln z = \ln r e^{i(\varphi + 2\pi n)}$$

$$= \ln r + \ln e^{i(\varphi + 2\pi n)}$$

$$= \ln r \underbrace{+ i(\varphi + 2\pi n)}_{\text{mehrwertig!}}$$

• Matrizenschreibweise:

$$Z = a\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{E}}}}_{\hat{=}\,\mathrm{Re}} + b\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{I}}}}_{\hat{=}\,\mathrm{Im}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \hat{=}\, a + ib$$

Test: (i) Einheitsmatrix: $\underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}$

(ii) $\underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\underline{\underline{E}} \;\hat{=}\; i^2 = -1$

(iii) Multiplikation: (oder auch mit $\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{pmatrix}\right]$

$$Z_1 Z_2 = \left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & a_1 a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_1 b_2 \\ a_1 b_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b_1 a_2 \\ b_2 a_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1 b_2 & 0 \\ 0 & -b_1 b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & 0 \\ 0 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_1 b_2 - b_1 a_2 \\ +a_1 b_2 + b_1 a_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2)\,\underline{\underline{E}} + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,\underline{\underline{I}} \;\hat{=}\; (ac - bd) + i(bc + ad)$$

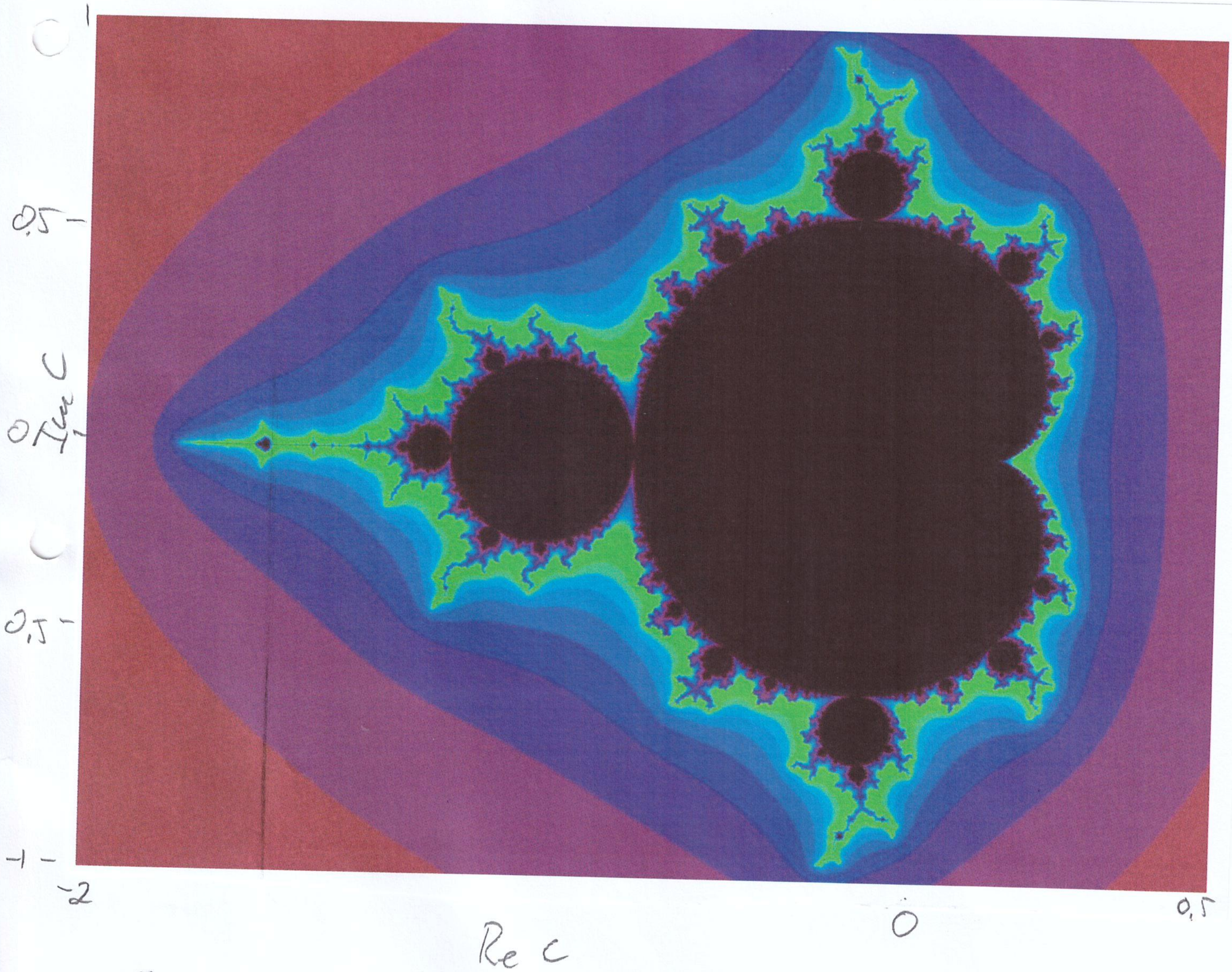
$$z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z^* = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

$z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ vgl.: $\begin{pmatrix} r\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$ Drehstreckungen!

Skalierung r, Drehwinkel φ

$\hat{=}\ re^{i\varphi}$ in komplexer Ebene

Mandelbrot-Menge: Iteration von $f_c(z) = z^2 + c$: $z_0 = 0$, $z_1 = c$, $z_2 = c^2 + c$, $z_3 = f_c(z_2)$ ...

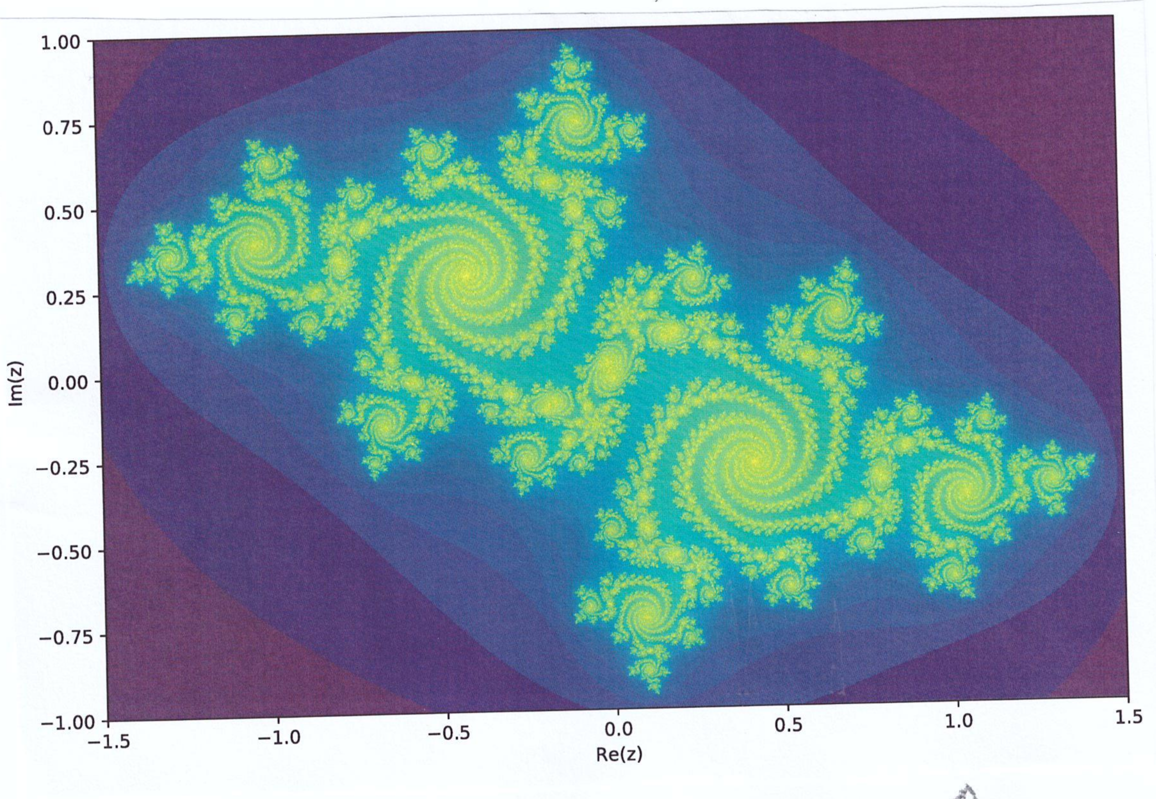


Farbcode: Schwarz für $|z_n| < 1000$

bunt für $|z_n| \geq 1000$, in welchem Schritt n

(hier: rot $\hat{=}$ $n = 5$)

Julia-Menge:



hier: c fest (etwa: $c = -0.51251149 + i\, 0.5212955$)

und z variabel: $f_c(z) = z^2 + c$

Farbcode: gelb $\hat{=}$ beschränkt $z_{n+1} = z_n^2 + c$ bleibt $|z| \leq 2$

bunt: Iterationsschritt, bei dem $|z| > 2$

Erweiterung auf andere Polynome möglich

↳ Fraktale Struktur (Selbstähnlichkeit bei Zoom)

↳ Anknüpfung an dynamische Systeme und Chaos

5.1 Complex numbers (definitions and basic calculations)

$z = a + ib = r e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ with $a, b, r, \varphi \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, $i^2 = -1$

$a = \mathrm{Re}(z)$: realpart, $b = \mathrm{Im}(z)$: imaginary part

$r = |z|$: absolute value, $\varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$: argument

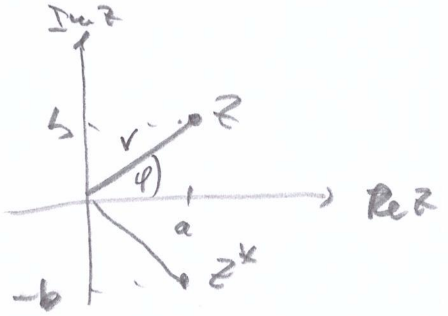
$= \sqrt{a^2 + b^2}$

watch out of signs of a, b

$= \sqrt{z z^*}$, $z^* = a - ib$ complexconjugate $\hookrightarrow$ arctan2-function! : $\arctan2(x, y)$

5.2 complex plane

multi-valued phase: $z = r e^{i\varphi} = r e^{i(\varphi + n 2\pi)}$, $n \in \mathbb{Z}$



multiplication:

$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$

$= r_1 r_2 \, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

5.3 complex exponential

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Euler's formula : $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$

complex logarithm: $\ln z = \ln r + i(\varphi + n 2\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$ multi-valued!

Mandelbrot set : $f_c(z) = z^2 + c$ with varying c and $z_0 = 0$

$\hookrightarrow z_{n+1} = f_c(z_n)$

Julia set : $f_c(z) = z^2 + c$ with fixed c and varying z_0

complex numbers as matrices:

$$Z = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{E}}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{I}}} \mathrel{\hat{=}} a + ib$$

$\underline{\underline{I}} \Rightarrow \underline{\underline{I}}^2 = -\underline{\underline{E}}$

6 Elemente der linearen Algebra

Wichtig für: – Quantenmechanik
- Mechanik
- Differentialgleichungen
- Fourier-Transformation
- Datenanalyse
- ...

6. Elemente der linearen Algebra
6.1 Lineare Gleichungen
6.2 Vektorräume
6.3 Linearkombinationen, lineare Hülle, Erzeugendensysteme
6.4 Basis eines Vektorraums
6.5 Matrizen als Darstellung linearer Abbildungen
6.6 Matrizenrechnung
6.7 Rang einer Matrix
6.8 Lösen linearer Gleichungssysteme, Gaußsches Eliminationsverfahren
6.9 Invertieren von Matrizen
6.10 Determinate
6.11 Basiswechsel und Koordinatentransformationen
6.12 Eigenwertproblem
6.13 Diagonalisieren von Matrizen
6.14 Orthogonale, unitäre, hermitesche Matrizen

Herausforderung: Lineare Algebra meist 2 volle VL in Mathematik!
↳ hier: 2-3 Wochen nur!
⇒ Auswahl / Übersicht / Physikbrille

Achtung: viele Definitionen!
↳ Vokabellernen (damit wir uns überhaupt darüber unterhalten können)

Fokus: Intuition, Veranschaulichung, Beispiele, Physik

6.1 Lineare Gleichungen

Def: **Lineare Gleichungen** $L(u) = v$ sind definiert durch:

$$1)\quad L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$$

$$2)\quad L(\alpha u) = \alpha L(u)$$

u_1, u_2, u: Zahlen oder Vektoren

Bsp.: (i) Schwingungsgleichung:

$$\underbrace{\Big(m \frac{d^2}{dt^2} + \underbrace{\gamma \frac{d}{dt}}_{\text{Stokesche Reibung}} + k\Big)}_{L} x(t) = F(t)$$

(ii) Poisson-Gleichung (etwa in 2D):

$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}_{L} u(x,y) = v(x,y)$$

(iii) Lineares Gleichungssystem:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = y_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = y_2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{L} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(iv) Schrödinger-Gleichung:

$$\underbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi}_{L_1\psi} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi}_{L_2\psi}$$

(v) Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} B$$

$$\nabla \cdot B = 0 \qquad \nabla \times B = \mu_0 j + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Gegenbeispiel: Newtonsche Reibung:

$$m \ddot{x} + \underbrace{\tilde{\gamma} (\dot{x})^2}_{\text{quadratisch!}} = F(t)$$

$\Rightarrow$ Lineare [illegible]

§.2 Vektorräume

Def: Eine nichtleere Menge V mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt **Vektorraum** über einem Körper $\mathbb{K}$ (meist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), wenn für alle $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

(V1) $\underline{v} + \underline{w} \in V$, $\lambda \cdot \underline{v} \in V$ — Abgeschlossenheit

(V2) $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w} = \underline{u} + (\underline{v}+\underline{w})$ — Assoziativität

(V3) $\exists\, \underline{0} \in V : \underline{u} + \underline{0} = \underline{u}$ — neutrales Element

(V4) $\exists\, \underline{u}' \in V : \underline{u} + \underline{u}' = \underline{0}$ — inverses Element

(V5) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ — Kommutativität

(V1)–(V5): Abel'sche kommutative Gruppe

(V6) $\lambda \cdot (\underline{u}+\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{u} + \lambda \cdot \underline{v}$ — Distributivität

(V7) $(\lambda+\mu)\underline{u} = \lambda \underline{u} + \mu \underline{u}$

(V8) $(\lambda \mu) \cdot \underline{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{u})$

(V9) $1 \cdot \underline{u} = \underline{u}$

Def: Die Elemente eines Vektorraums heißen **Vektoren**.

↳ Vektoren: mathematische Objekte, die man addieren und mit einem Skalar multiplizieren kann. Existenz von $\underline{v} \cdot \underline{w}$, $\underline{v} \times \underline{w}$ nicht notwendig!

↳ nicht notwendigerweise Pfeile im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

Bsp.: (i) $V = \mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \middle|\, v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{K} \right\}$ (etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

(ii) Polynome vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$:

$$V = \{ a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{K} \;\; \forall i \}$$

(iii) Funktionenräume:

$$V = \{ f : M \to \mathbb{K} \} \text{ mit } f+g : x \mapsto f(x)+g(x),\; \alpha \cdot f : x \mapsto \alpha f(x)$$

Def: Eine nichtleere Teilmenge U eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V heißt Untervektorraum, wenn für $\underline{u}, \underline{v} \in U$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

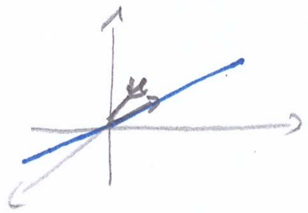
(U1) $\underline{u} + \underline{v} \in U$

(U2) $\lambda \underline{u} \in U$

Bem: Untervektorräume (Teilräume) sind Vektorräume

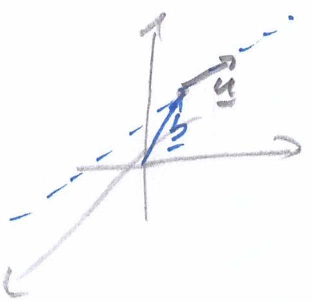
Bsp: (i) Lösungen $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ von $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$ bilden einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$:

(ii) Gerade im $\mathbb{R}^3$ in Richtung $\underline{u}$: $g = \{ \underline{x} = \underline{u} t \mid t \in \mathbb{R} \}$



Gegenbeispiel: um $\underline{b} \neq \underline{0}$ (nicht parallel) zu $\underline{u}$ verschobene Gerade

$$g' = \{ \underline{x} = \underline{u} t + \underline{b} \mid t \in \mathbb{R} \}$$: kein Untervektorraum!



etwa: $2 \underline{x}(t=0) = 2\underline{b} \notin g'$

$\Rightarrow$ affiner Teilraum/Unterraum

6.3 Linearkombinationen, lineare Hülle (Aufspann), Erzeugendensysteme

Def: Jeder Vektor der Form

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \ , \quad \alpha_i \in \mathbb{K}$$

heißt **Linearkombination** der Vektoren $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$.

Def.: Die Menge aller Linearkombinationen aus $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ heißt ihr **Aufspann** (**lineare Hülle, Erzeugnis**): $\mathrm{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$

Bsp.: $\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$ (auch ohne $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$)

↳ Der Aufspann ist ein Teilraum von V.

Def.: Ist $X \subseteq V$ und $\mathrm{span}(X) = U$ ein Teilraum von V
(alle Elemente von U eine Linearkombination von X
$\forall \underline{u} \in U: \underline{u} = \alpha_1 \underline{x}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{x}_n \ , \ \underline{x}_i \in X \ , \ \alpha_i \in \mathbb{K}$),
so nennt man X ein **Erzeugendensystem** von U. (X erzeugt U)

Def.: U heißt **endlich erzeugt**, wenn U ein endliches Erzeugendensystem hat.

Def.: Die Vektoren $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn aus $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0}$ folgt: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Andernfalls heißen sie **linear abhängig**.

Alternativ (i) $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für jede echte Teilmenge T von $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ gilt:

$$\mathrm{span}(T) \subsetneq \mathrm{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$$

D.h.: T spannt nur einen Teil von $\mathrm{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ auf.

(ii) linear unabhängig, wenn sich kein $\underline{v}_i$ durch Linearkombination der anderen $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_n$ darstellen lässt.

6 Elements of linear algebra

6.1 Linear equations

linear equations $L(u)=v$ with linear operator L:

$$\text{(i)}\quad L(u+v)=L(u)+L(v) \qquad \text{(ii)}\quad L(\alpha u)=\alpha L(u)$$

6.2 Vektorspaces (linear spaces)

a non-empty set V with a binary operation $+$ and a binary function $\cdot$ is called a vector space over a field $\mathbb{K}$, if the following holds for all $\underline{u},\underline{v},\underline{w} \in V$ and $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$:

(V1) $\underline{v}+\underline{w} \in V$, $\lambda \cdot \underline{v} \in V$

(V2) $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w} = \underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$ (associativity)

(V3) $\exists\, \underline{0} \in V : \underline{u}+\underline{0}=\underline{u}$ (neutral element)

(V4) $\exists\, \underline{u}' \in V : \underline{u}+\underline{u}'=\underline{0}$ (inverse element)

(V5) $\underline{u}+\underline{v} = \underline{v}+\underline{u}$ (commutativity)

(V6) $\lambda\cdot(\underline{u}+\underline{v}) = \lambda\cdot\underline{u}+\lambda\cdot\underline{v}$ (distributivity)

(V7) $(\lambda+\mu)\,\underline{u} = \lambda\,\underline{u}+\mu\,\underline{u}$

(V8) $(\lambda\mu)\cdot\underline{u} = \lambda\cdot(\mu\cdot\underline{u})$

(V9) $1\cdot\underline{u} = \underline{u}$

vector: element of a vector space

linear subspace: $U \subset V$ with V $\mathbb{K}$-vectorspace if

for $\underline{u},\underline{v} \in U$, $\lambda \in \mathbb{K}$: (U1) $\underline{u}+\underline{v} \in U$

(U2) $\lambda\,\underline{u} \in U$

6.3 linear combination, span, generating set

linear combination $\alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$

span : set of all linear combinations of $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n$: $\text{span}\{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n\}$

generating set: $X \subseteq V$, $\text{span}(X)=U$: $\forall \underline{u} \in U$: $\underline{u}=\alpha_1\underline{x}_1+\ldots+\alpha_n\underline{x}_n$, $\underline{x}_i \in X$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$

linear independence: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$

alternatively: no vector of a set can be written as a linear combination of the other elements

Bsp: (i) $\underline{u}, \underline{v}$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ $\underline{u} = \lambda \underline{v}$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ linear unabhängig

(iii) $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\underline{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=\underline{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\underline{v}_3} \right\}$ linear unabhängig?

$\hookrightarrow$ Teste $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rrrl} \alpha_1 & & +3\alpha_3 & =0 \\ -\alpha_1 & +\alpha_2 & -4\alpha_3 & =0 \\ & -2\alpha_2 & +2\alpha_3 & =0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 \end{array}\right\} \alpha_1 + 3\alpha_3 = 0$$

$\Rightarrow$ Lösg: $\alpha_2 = \alpha_3 = 1, \alpha_1 = -3 \Rightarrow$ linear abhängig!

$\Rightarrow \underline{v}_3 = 3\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \Rightarrow \operatorname{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\} = \operatorname{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

6.4 Basis eines Vektorraums, Dimension

Def.: Die Menge $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ von Vektoren eines $\mathbb{K}$-Vektorraums heißt **Basis** von V, wenn sich jeder Vektor $\underline{v} \in V$ auf genau eine Linearkombination $\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n$ darstellen lässt. $(\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K})$

Die durch $\underline{v}$ eindeutig bestimmten Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ heißen **Koordinaten** von $\underline{v}$ bzgl. der Basis B:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B$$

Satz: $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ ist genau dann eine Basis von V, wenn gilt:

- $\operatorname{Span} B = V$ (B erzeugt V)
- B ist linear unabhängig.

D.h.: Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei B Basis von V

$\Rightarrow$ Span $B = V$ und alle $\underline{v} \in V$ lassen sich schreiben als

$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{b}_n \Rightarrow$ also auch $\underline{v} = \underline{0}$.

mit eindeutigen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

$\Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ (einzige Lösung)

$\Rightarrow$ B linear unabhängig

"$\Leftarrow$" Sei B linear unabhängiges Erzeugendensystem

Angenommen: $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{b}_i$ (2 Darstellungen von $\underline{v}$)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \underline{v}_i = \underline{0}$

$\Rightarrow \alpha_i = \beta_i \; \forall i$

$\Rightarrow$ Koordinaten eindeutig (also B ist Basis) $\square$

Bsp: (i) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^2$

(ii) $B = \{ X^n \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$ ist Basis des Vektorraumes der Polynome

$\mathbb{K}[X] := \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mid n \in \mathbb{N}_0, a_k \in \mathbb{K} \; \forall k \right\}$

B hat unendlich viele Elemente.

Def: Sei B eine Basis aus n Vektoren eines endlich erzeugten Vektorraumes V. Dann heißt n die Dimension von V: $\dim V = n$. Ist V nicht endlich erzeugt, setzen wir $\dim(V) = \infty$

Bsp.: (i) $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ (ii) $\dim(\mathbb{C}^3) = 3$ (iii) $\dim(\mathbb{K}[X]) = \infty$

Satz: Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

(Jedes Erzeugendensystem enthält eine Basis) (Basisauswahlsatz)

(Jede linear unabhängige Teilmenge von V kann durch Hinzunehmen weiterer Vektoren zu einer Basis ergänzt werden.)

(Basisergänzungssatz)

Bem: $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension n:

(i) Je n linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis von V.

(ii) Jedes Erzeugendensystem mit n Elementen bildet eine Basis

(iii) Mehr als n Vektoren sind stets linear abhängig.

6.5 Matrizen als Darstellung linearer Abbildungen

Satz: Sei $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ eine Basis von V. Dann ist die lineare Abbildung L durch die Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt.

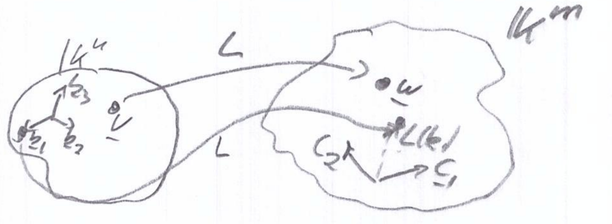
- Alle $\underline{v} \in V$ lassen sich auf genau eine Weise schreiben: $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{b}_i$

  $\Rightarrow L(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, L(\underline{b}_i)$.

- $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $\underline{B} = \{\underline{b}_1, \dots, b_n\}$ geordnete Basis von $\mathbb{K}^n$ (Reihenfolge festgelegt)

  $\underline{v} \mapsto \underline{w} = L(\underline{v})$ $\quad \underline{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$ — " — von $\mathbb{K}^m$

$$\Rightarrow \underline{w} = \underbrace{L(\underline{b}_1)}_{\text{Bild des 1. Basisvektors}} \alpha_1 + \dots + L(b_n)\,\alpha_n$$



$$\Leftrightarrow \quad w_1 = L(\underline{b}_1)_1 \alpha_1 + \dots + L(\underline{b}_n)_1 \alpha_n$$

$$\vdots$$

$$w_m = \underbrace{L(\underline{b}_1)_m}_{\substack{m\text{-te Koordinate}\\ \text{bzgl. Basis } C \text{ des Bilds}\\ \text{des 1. Basisvektors von } B}} \alpha_1 + \dots + L(\underline{b}_n)_m \alpha_n$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}_C}_{\text{Koordinaten in Basis } C} = \underbrace{\begin{pmatrix} L(\underline{b}_1)_1 & \dots & L(b_n)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ L(\underline{b}_1)_m & \dots & L(b_n)_m \end{pmatrix}}_{= \underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B$$

"Zeile mal Spalte"
"Matrix mal Vektor"

Koordinaten zur Basis B

$\underline{\underline{A}}$: Matrix legt eindeutig die Abbildung L fest

Mit $a_{ij} = L(\underline{b}_j)_i \quad j=1,\dots,n,\ i=1,\dots,m$

ergibt sich eine $m \times n$ Matrix $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$$\Rightarrow \quad \underline{w}_C = \underline{\underline{A}}\, \underline{v}_B$$

↳ l-ter Basisvektor: $\underline{b}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert l-te Spalte von $\underline{\underline{A}}$: $\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Allgemein:

Kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\underline{v} \in V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "k_B"'] & \underline{w} \in W \arrow[d, "k_C"] \\
\underline{v}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_C L_B"] & \underline{w}_C \in \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Koordinatenabbildung

Verknüpfung

darstellende Matrix: ${}_C L_B : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit ${}_C L_B = k_C \circ L \circ k_B^{-1}$

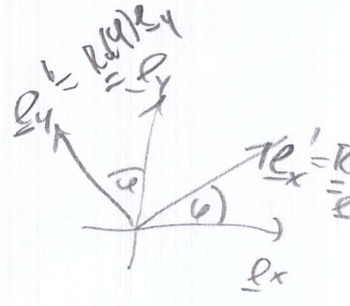
Bsp.: (i) Ableitungsoperator:

$B = \{p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2\}$: geordnete Basis des Vektorraums der Polynome mit Grad ≤ 2.

Ableitungsoperator $D = \frac{d}{dx}$ hat Bilder von $p_0, \dots, p_2$:

$D p_0 = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B$, $D p_1 = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B$, $D p_2 = 2x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_B$

$$\Rightarrow {}_B \underline{\underline{D}}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



(ii) Rotation in $\mathbb{R}^2$ um Winkel φ:

$B = \{\underline{e}_x, \underline{e}_y\}$ mit $\underline{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$, $\underline{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$

$$\left.\begin{aligned} \hookrightarrow \underline{e}_x' &= \cos\varphi\, \underline{e}_x + \sin\varphi\, \underline{e}_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_B \\ \underline{e}_y' &= -\sin\varphi\, \underline{e}_x + \cos\varphi\, \underline{e}_y = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}_B \end{aligned}\right\} \Rightarrow {}_B \underline{\underline{R}}_B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

6.6 Matrizenrechnung

$\underline{\underline{A}} = \{a_{ij}\}$, $\underline{\underline{B}} = \{b_{ij}\}$, $\underline{\underline{C}} = \{c_{ij}\}$ Matrizen

(i) Summe: $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + (\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) \quad \text{assoziativ}$$

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}} \quad \text{(kommutativ)}$$

(ii) skalare Multiplikation: $(\alpha \underline{\underline{A}})_{ij} = \alpha a_{ij}$, $\alpha \in \mathbb{K}$

↳ Matrizen $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ bilden einen Vektorraum der Dimension mn

(iii) Multiplikation

$$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{m \times n}, \ \underline{\underline{B}} = \mathbb{K}^{n \times p} \Rightarrow \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \in \mathbb{K}^{m \times p}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \equiv a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, p$$

Bsp.: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & +2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

offenbar $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ (nicht kommutativ)

aber: $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}$ (distributiv)

$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})$ (assoziativ)

$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ nur definiert, falls Anzahl Spalten von $\underline{\underline{A}}$ = # Zeilen von $\underline{\underline{B}}$

6.4 Basis and dimension

- $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ is a basis of V if all elements $\underline{v} \in V$ can be written as a unique linear combination of generating set $\underline{B}$:

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n$$

coordinates

- Theorem: $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ basis $\Leftrightarrow$ span $B = V$ and B linearly independent.

- Dimension of V: $\dim V = |B|$ ($|\cdot|$: # elements of B)

basis of V

- Theorem: Every vector space has a basis
  - ↳ every generating set contains a basis (reduction)
  - ↳ extend linearly independent subsets to basis (extension)

6.5 Matrices as representation of linear maps

Theorem: $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ basis of V, $L: V \to W$ linear map.

Then: L completely/fully determined by images of B.

commuting diagram:

basis of V | basis of W

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \underline{b}_i \qquad \underline{w} = \sum_{j=1}^{m} w_j \underline{c}_j$$

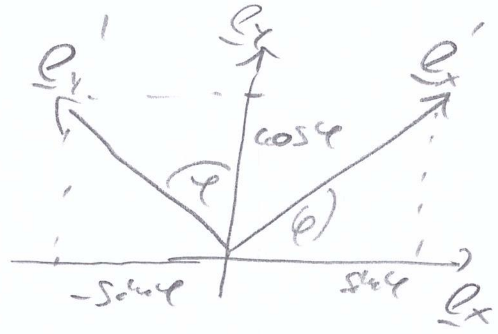
$$\begin{tikzcd}
\underline{v} \in V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "K_B"'] & \underline{w} \in W \arrow[d, "K_C"] \\
\underline{v}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_C L_B"'] & \underline{w}_C \in \mathbb{K}^m_C
\end{tikzcd}$$

coordinate maps

transformation matrix $\quad {}_C L_B = K_C \circ L \circ K_B^{-1}$

Rotations in $\mathbb{R}^2$ by angle φ:

$B = \{\underline{e}_x, \underline{e}_y\}$ with $\underline{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



$$\underline{e}_x' = \cos\varphi\, \underline{e}_x + \sin\varphi\, \underline{e}_y = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}_B$$

$$\underline{e}_y' = -\sin\varphi\, \underline{e}_x + \cos\varphi\, \underline{e}_y = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\underline{e}_x'\\ \underline{e}_y'\end{pmatrix}_B = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}}_{\underset{B}{=}R_B}\begin{pmatrix}\underline{e}_x\\ \underline{e}_y\end{pmatrix}_B$$

6.6 Matrix calculations

(i) sum: $(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})+\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}+(\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}})$, $\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}+\underline{\underline{A}}$

(ii) $(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$

(iii) $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\underline{\underline{B}} = \mathbb{K}^{n\times p}$, $\underline{\underline{C}} = \mathbb{K}^{p\times q}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1p}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{np}\end{pmatrix} \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1q}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{p1} & \cdots & c_{pq}\end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$ matching dimensions!

$(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}$, but $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ (mostoften)

$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}} \not\Rightarrow \underline{\underline{A}} = 0$ or $\underline{\underline{B}} = 0$, e.g. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

dot product: $\underset{\substack{\uparrow\\ n\times 1}}{\underline{a}}\cdot\underline{b} = \underset{\substack{\uparrow\\ 1\times n}}{\underline{a}^T}\underline{b} = (a_1, \ldots, a_n)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

$$\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{w} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$$

$$(\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}))_{ij} = \sum_k a_{ik} (\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})_{kj}$$

$$= \sum_k a_{ik} \sum_l b_{kl} c_{lj}$$

$$= \sum_l \underbrace{\left(\sum_k a_{ik} b_{kl}\right)}_{(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})_{il}} c_{lj}$$

$$= ((\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}})_{ij}$$

- $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ nicht kommutativ

  Bsp.: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

  $\hookrightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Kommutator $[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}] := \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$
wichtig in der Quantenmechanik

$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \neq 0$

Orts- Impulsoperator
nicht gleichzeitig genau bestimmbar
(Heisenbergsche Unschärfe rel.)

- nicht nullteilerfrei: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}}$ folgt nicht $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$ oder $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}}$

  Bsp: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ obwohl $\underline{\underline{A}} \neq \underline{\underline{0}}$

- Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$: $\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1 \dots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \underline{a}^T \underline{b} \in \mathbb{R}$

  transponiert

- Matrix mal Vektor = Vektor

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \underline{\underline{A}}\ \underline{u}$$

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k$$

- Matrixmultiplikation: Verkettung von 2 linearen Abbildungen

$$\left.\begin{array}{llll} & U \xrightarrow{L} & V \xrightarrow{M} & W \\ \text{Dim} & n & m & l \\ \text{Basis} & A & B & C \\ \text{Matrix} & {}_B L_A \in K^{m\times n} & {}_C M_B \in K^{l\times m} & \end{array}\right\}$$

$M \circ L : U \to W$

$\underline{u} \in U \mapsto \underline{w} = M(L(u)) = (M \circ L)(u) \in W$

$$\underline{w}_C = {}_C M_B \left({}_B L_A\, \underline{u}_A\right)$$

$$= \underbrace{\left({}_C M_B\, {}_B L_A\right)}_{\in K^{l\times n}} \underline{u}_A$$

$$= (M \circ L) \dots u$$

6.7 Rang einer Matrix

lin. Abbildung $L: V \to W$ mit Matrix $\underline{\underline{M}}_L$:

- **Zeilenrang** := # linear unabhängiger Zeilenvektoren
- **Spaltenrang** := # —— " —— Spaltenvektoren

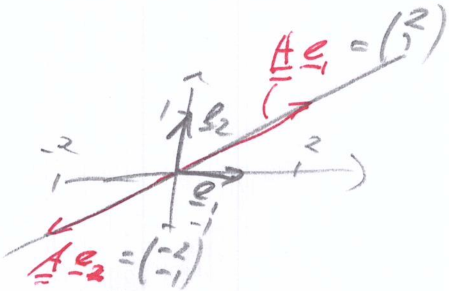
Es gilt: Zeilenrang = Spaltenrang =: Rang der Matrix M_L : rang(M_L)

$\mathrm{Bild}(L) = \{L(\underline{u}) \mid \underline{u} \in V\} \subset W$

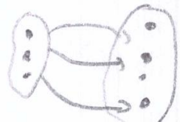
$\Rightarrow \quad \mathrm{rang}\, M_L = \dim(\mathrm{Bild}(L))$

Bsp: (i) $\mathrm{rang} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}}_{=\underline{\underline{B}}} = 2$ lin. abhängig

(ii) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow \mathrm{rang}\, \underline{\underline{A}} = 1$

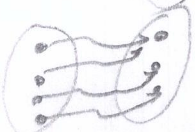


- $L: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ **injektiv** $\Leftrightarrow \mathrm{rang}\, \underline{\underline{M}}_L = n$



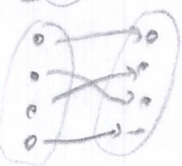
linkseindeutig

- $L: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ **surjektiv** $\Leftrightarrow \mathrm{rang}\, \underline{\underline{M}}_L = m$



jedes Element hat ein Urbild

- $L: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ **bijektiv** $\Leftrightarrow n = m = \mathrm{rang}(\underline{\underline{M}}_L)$



- $\underline{\underline{A}}^T$ (**Transponierte** von $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$): $(\underline{\underline{A}}^T)_{ij} = a_{ji} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^T \in \mathbb{R}^{n\times m} \Rightarrow \mathrm{rang}\, \underline{\underline{A}} = \mathrm{rang}\, \underline{\underline{A}}^T$

- $\underline{\underline{C}}^\dagger$ (**Adjungierte** von $\underline{\underline{C}} \in \mathbb{C}^{m\times n}$): $(\underline{\underline{C}}^\dagger)_{ij} = c^*_{ji} \Rightarrow \mathrm{rang}\, \underline{\underline{C}} = \mathrm{rang}\, \underline{\underline{C}}^\dagger$

- Wenn $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}^{-1}$: **orthogonal** $\underline{\underline{A}}$

- wenn $\underline{\underline{C}}^\dagger = \underline{\underline{C}}^{-1}$: **unitär** $\underline{\underline{C}}$

6.7 Rank of a matrix

linear map $L : V \to W$ with representing matrix $\underline{\underline{M}}_L$

- column rank: number of linearly independent columns
- row rank: — " — rows

↳ row rank = column rank = rang $(\underline{\underline{M}}_L) \equiv$ rank $(\underline{\underline{M}}_L)$

- $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ injective $\Leftrightarrow$ rank $\underline{\underline{M}}_L = n$ (full column rank)
(one-to-one)

$$\underline{\underline{M}}_L = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \\ m_{m1} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

- $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ surjective $\Leftrightarrow$ rank $\underline{\underline{M}}_L = m$ (full row rank)
(onto/full image)
- $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ bijective $\Leftrightarrow$ rank $\underline{\underline{M}}_L = m = n$

- transposed matrix: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ with $(\underline{\underline{A}}^T)_{ij} = a_{ji}$
rank $\underline{\underline{A}}^T$ = rank $\underline{\underline{A}}$

- adjoint matrix: $\underline{\underline{C}} \in \mathbb{C}^{m \times n} \Rightarrow \underline{\underline{C}}^\dagger \in \mathbb{C}^{n \times m}$ with $(\underline{\underline{C}}^\dagger)_{mn} = a_{nm} - i b_{nm}$

$$\underline{\underline{C}}^\dagger = (\underline{\underline{C}}^*)^T = (\underline{\underline{C}}^T)^* = \underline{\underline{C}}^H \leftarrow \text{Hermitian}$$

- orthogonal matrix: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ with $\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{1}}$

- unitary matrix: $\underline{\underline{C}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ with $\underline{\underline{C}}^\dagger \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{C}}^\dagger = \underline{\underline{1}}$

6.8 Lösen linearer Gleichungssysteme (Gauß'sches Eliminationsverfahren)

Löse: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{K}^m$

(m Gleichungen mit n Unbekannten)

Bsp.:
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

Schritt 1: Zeilen vertauschen, sodass oben links $a_{11} \neq 0$ (hier ok)

Schritt 2: Stufenform herstellen (durch Äquivalenzumformungen)

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \text{II}': \text{II} - \text{I}: \\ \text{III}': \text{III} - 3\text{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \text{III}' - 3\text{II}' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Schritt 3: Normierung der Zeilen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 4: Rückwärts einsetzen

$x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = -2x_3 = -6$, $x_1 = 2 - 3x_3 - 2x_2 = 5 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

(Test, ob's stimmt!)

Lösbarkeit: für $m = n$:

(i) rang $\underline{\underline{A}} = n$: Bild$(A) = \mathbb{K}^n \Rightarrow$ Lösung existiert und ist eindeutig

(ii) rang $\underline{\underline{A}} < n$: – Lösungsmenge (Gerade / Ebene) falls $\underline{b} \in$ Bild(A)

– kein Lösung, falls $\underline{b} \notin$ Bild$(\underline{\underline{A}})$

Bsp: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow s := x_3$, $x_2 = -2s$, $x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_3$
$= 2 - s$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge: $\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $s \in \mathbb{R}$

6.9 Invertieren von Matrizen

Lösen von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ per inverse Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$, sodass

$$\underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}}_{\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b} \Rightarrow \underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$$

Def: Eine quadratische Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt invertierbar (regulär), falls eine Matrix $\underline{\underline{B}}$ existiert mit $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

B ist eindeutig bestimmt und heißt Inverse zu $\underline{\underline{A}}$: $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$

- $(\underline{\underline{A}}^{-1})^{-1} = \underline{\underline{A}}$
- $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ invertierbar: $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$

$$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})(\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}) = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}}^{-1})\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \mathbb{1}$$

- $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar $\Leftrightarrow$ rang $\underline{\underline{A}} = n$
- allgemein: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$ Falls $ad - bc \neq 0$: $\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ Cramersche Regel

Bsp: (i) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Test $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar (rang $\underline{\underline{A}} = 1$)

(iii) $\underline{\underline{R}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{R}}(\alpha)^{-1} = R(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Rotationsmatrix

da $\underline{\underline{R}}(\alpha)\,\underline{\underline{R}}(\alpha) = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Wie geht Invertieren allgemein?

$$\left(\underline{\underline{A}} \,\middle|\, \underline{\underline{\mathbb{1}}}\right) \Longrightarrow \left(\underline{\underline{\mathbb{1}}} \,\middle|\, \underline{\underline{A}}^{-1}\right)$$

Umformen nach Gauß'schem Verfahren (links wie rechts)

Bsp.: (i)

$$\begin{array}{c} I: \\ II: \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\hookrightarrow \begin{array}{c} I' = I - II \\ II' \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\hookrightarrow \begin{array}{c} I'' \\ II'' = II' - 2I' \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\hookrightarrow \begin{array}{c} I''' \\ II''' = -II'' \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\hookrightarrow I''' - 3II''' \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Test} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15+16 & 24-24 \\ -10+10 & 16-15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \dots \longrightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.10 Determinante

"alternierende Multilinearform auf Spaltenvektoren"

Def.: Gegeben sei $\underline{\underline{A}} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Für $n=1$: $\underline{\underline{A}} = a_{11}$ definieren wir $\det \underline{\underline{A}} = a_{11}$ als Determinante

Für $n \geq 2$: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$: $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(\underline{\underline{A}}_{i1})$

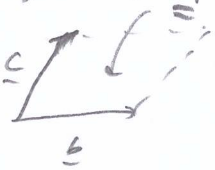
Achtung! nicht $(\underline{\underline{A}})_{ij} = a_{ij}$

wobei $\underline{\underline{A}}_{ij}$ hervorgeht aus $\underline{\underline{A}}$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte

$\underline{\underline{A}}_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{A}}_{21} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Bsp.: (i) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $n=2 \Rightarrow \det \underline{\underline{A}} = a_{11} \underbrace{\det(\underline{\underline{A}}_{11})}_{=\det a_{22} = a_{22}} - a_{21} \underbrace{\det(\underline{\underline{A}}_{21})}_{=\det a_{12} = a_{12}}$

Spalten: $\underline{b}$, $\underline{c}$ $\quad$ Fläche $\hat{=}$



$= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$

(ii)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 7 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 4 \cdot (2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) + 7 \cdot (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5)$$

$$= -3 \quad -4 \, (-6) \quad +7 \, (-3)$$

$$= -3 \quad +24 \quad -21$$

$$= 0$$

(iii) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}$

(iv) $\det(\mathbb{1}_n) = 1$

• $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

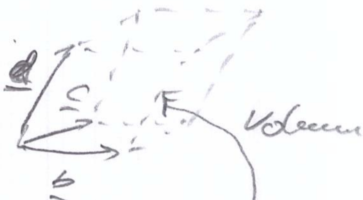
$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} - & - & - & + & + & + \\ \underline{b} & \underline{c} & \underline{d} & & & \end{matrix}$$

(Sarrus-Regel)

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$



$\det \underline{\underline{A}} = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{d})$

falls $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lin. abhängig

Eigenschaften: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(i) $\det \underline{\underline{A}}^T = \det \underline{\underline{A}}$

(ii) $\det \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{B}}$

(iii) $\det \underline{\underline{A}}^{-1} = \dfrac{1}{\det \underline{\underline{A}}}$

(iv) $\det \underline{\underline{A}} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} \underline{\underline{A}} < n$, $\underline{\underline{A}}$ singulär

$\det \underline{\underline{A}} \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} \underline{\underline{A}} = n$, $\underline{\underline{A}}$ regulär (invertierbar)

(v) Entwicklung nach beliebiger Zeile oder Spalte:

r-te Zeile: $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{r+s} a_{rs} \det \underline{\underline{A}}_{rs}$

s-te Spalte: $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+s} a_{rs} \det \underline{\underline{A}}_{rs}$ $\in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$

Bsp.: $\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} = 0$, klar, weil $2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{rang} \underline{\underline{A}} = 2$

↳ Spaltenvektoren (Bilder der Basisvektoren) spannen nur eine Ebene auf $\Rightarrow$ Volumen 0.

6.8 Systems of linear equations (Gaussian elimination)

Solve $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ by transforming $\underline{\underline{A}}$ to row echelon form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \longrightarrow \dots \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \ddots & * & \tilde{b}_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0\ 1 & \tilde{b}_m \end{array}\right)$$

Does a solution $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ exist for $m = n$?

(i) $\operatorname{rank} \underline{\underline{A}} = n$: $\operatorname{image}(\underline{\underline{A}}) = \mathbb{K}^n \Rightarrow$ unique solution exists.

(ii) $\operatorname{rank} \underline{\underline{A}} < n$: solution exists (but is not unique) if $\underline{b} \in \operatorname{image}(\underline{\underline{A}})$

—"— does not exist if $\underline{b} \notin \operatorname{image}(\underline{\underline{A}})$

6.9 Inverse matrix

Solution of $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ given by $\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$ with $\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \mathbb{1}$

Def.: A square matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ is called invertible if a matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ exists with $\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \mathbb{1}$.

condition: $\operatorname{rank} \underline{\underline{A}} = n \Leftrightarrow \det \underline{\underline{A}} \neq 0$

- $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ Cramer's rule (if $ad-bc \neq 0$)
- Find inverse $\underline{\underline{A}}^{-1}$ by transforming

$$(\underline{\underline{A}} \,|\, \mathbb{1}) \longrightarrow (\mathbb{1} \,|\, \underline{\underline{A}}^{-1})$$

6.10 Determinant

Def: $\underline{\underline{A}} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$

remove ith row, jth column

We define: for $n=1$: $\det \underline{\underline{A}} = a_{11}$

for $n \geq 2$: $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(\underline{\underline{A}}_{i1})$

$= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{r+s} a_{rs} \det(\underline{\underline{A}}_{rs})$ $\in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$

$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+s} a_{rs} \det(\underline{\underline{A}}_{rs})$

- Sarrus rule : $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$

$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$-\ +\ -\ +\ -\ +$

- $\det \underline{\underline{A}}^T = \det \underline{\underline{A}}$
- $\det \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{B}}$
- $\det \underline{\underline{A}}^{-1} = \dfrac{1}{\det \underline{\underline{A}}}$
- $\det \underline{\underline{A}} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} \underline{\underline{A}} < n$ (singular)
- $\det \underline{\underline{A}} \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} \underline{\underline{A}} = n$ (regular)

ex. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$ columns linearly dependent

$$2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- $\det \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{d})$ (triple product)

6.11 Basiswechsel und Koordinatentransformation

Betrachte $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Basen $B=\{\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n\}$, $C=\{\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_n\}$

$$\Rightarrow \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \underline{c}_i$$

derselbe Vektor in 2 Koordinatenfassungsform: $\underline{v}_B = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}_B$, $\underline{v}_C = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots \\ \gamma_n\end{pmatrix}$

Transformationsmatrix: $\underline{v}_C = \underbrace{{}_C\underline{\underline{M}}_B(\mathrm{id}_V)}_{\text{darstellende Matrix der Identitätsabbildung}}\, \underline{v}_B =: \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{v}_B$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "k_B"'] & V \arrow[d, "k_C"] \\
\underline{v}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_C\underline{\underline{M}}_B(\mathrm{id}_V)"'] & \underline{v}_C \in \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

$${}_C\underline{\underline{M}}_B(\mathrm{id}_V) = \Big(\underbrace{(\underline{b}_1)_C, \dots, (\underline{b}_n)_C}_{\substack{\text{Bilder der Basisvektoren von } B \\ \text{bzgl. Basis } C}}\Big) \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

Nun: $L: V \to V$ lineare Abbildung (statt Identität id_V)
$\qquad \underline{u} \mapsto \underline{v}$

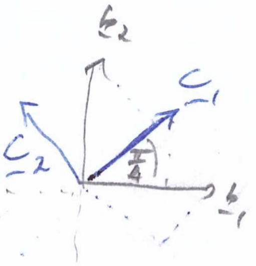
$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "k_B"'] & V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "k_B"] & V \arrow[d, "k_C"] \\
\underline{u}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_B\underline{\underline{L}}_B"'] & \underline{v}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_C\underline{\underline{M}}_B(\mathrm{id}_V) \,=\, \underline{\underline{S}}^{-1}"'] & \underline{v}_C \in \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

$$\underbrace{\underline{v}_B \overset{!}{=} {}_B\underline{\underline{L}}_B\, \underline{u}_B}$$

$$= \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{v}_B = \underline{\underline{S}}^{-1}\, {}_B\underline{\underline{L}}_B\, \underline{u}_B \Leftrightarrow \underline{v}_C = \overbrace{\underline{\underline{S}}^{-1}\, {}_B\underline{\underline{L}}_B}^{{}_C\underline{\underline{L}}_B}\, \underline{u}_B$$

$$\underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1}\,\underline{v}_B}_{\underline{v}_C} = \underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1}\,{}_B\underline{\underline{L}}_B\,\underline{\underline{S}}}_{{}_C\underline{\underline{L}}_C}\;\underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1}\,\underline{u}_B}_{\underline{u}_C}$$

Bsp.: $\mathbb{R}^2$ mit $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$ und $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$ um $\frac{\pi}{4}$ gedreht



$$\Rightarrow (\underline{c}_1)_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\underline{b}_1} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\underline{b}_2}\Big], \quad (\underline{c}_2)_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}}_{-\underline{b}_1} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\underline{b}_2}\Big]$$

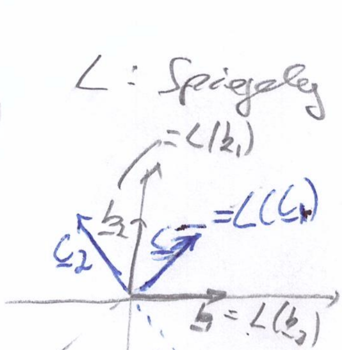
$$\Rightarrow {}_C\underline{\underline{M}}_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} =: \underline{\underline{S}}^{-1}$$

Basistransformationsmatrizen

$$(\underline{b}_1)_C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad (\underline{b}_2)_C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_C \Rightarrow {}_B\underline{\underline{M}}_C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left[\ \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{S}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \right]$$

L: Spiegelung an Diagonalen $y = x$



$$\left.\begin{aligned} L(\underline{b}_1) &= \underline{b}_2 \\ L(\underline{b}_2) &= \underline{b}_1 \end{aligned}\right\}\ {}_B\underline{\underline{L}}_B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} {}_C\underline{\underline{L}}_C &= \underline{\underline{S}}^{-1}\,{}_B\underline{\underline{L}}_B\,\underline{\underline{S}} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{\text{schön, einfach}} \end{aligned}$$

← $\underline{c}_1$ auf sich selbst ✓

← $\underline{c}_2$ auf $-\underline{c}_2$ ✓

$$L : V \to W$$
$$\underline{v} \mapsto \underline{w}$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, dash] \arrow[d, "K_A"] & V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "K_B"] & W \arrow[r, "id_W"] \arrow[d, "K_C"] & W \arrow[d, "K_D"] \\
\underline{v}_A \in \mathbb{K}^n & \underline{v}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[l, "\underline{\underline{T}}^{-1}"] \arrow[r, "\underline{\underline{L}}_{C \leftarrow B}"'] & \underline{w}_C \in \mathbb{K}^m \arrow[r, "\underline{\underline{S}}^{-1}"'] & \underline{w}_D \in \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

$$\underline{v}_B = \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{v}_A$$

$$\underline{v}_A = \underline{\underline{T}}\, \underline{v}_B$$

$$\underline{w} = L(\underline{v})$$

$$\Leftrightarrow \underline{w}_C = \underline{\underline{L}}_{C \leftarrow B}\, \underline{v}_B$$

$$\underline{w}_D = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{w}_C$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{w}_C = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{L}}_{C \leftarrow B}\, \underline{v}_B \qquad \left(\underline{w}_D = \underline{\underline{L}}_{D \leftarrow B}\, \underline{v}_B \right)$$

$$\Leftrightarrow \underline{w}_D = \underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{L}}_{C \leftarrow B} \underline{\underline{T}}}\; \underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1} \underline{v}_B}_{\text{Transformiere } B \to A}$$

$$\Leftrightarrow \underline{w}_D = \underline{\underline{L}}_{D \leftarrow A}\, \underline{v}_A$$

Berücksichtige Koordinatenänderung $B \to A$ bei L

darstellende Matrix von L bzgl Basen A und D

6.12 Eigenwertproblem

Frage/Idee: Finde Basis, für die eine gegebene Matrix Diagonalform bekommt

$$ {}_B\underline{\underline{L}}_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow {}_B\underline{\underline{L}}_B \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 \\ \vdots \\ \lambda_n v_n \end{pmatrix} $$

Def: Sei $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von $\underline{\underline{A}}$, wenn es Vektoren $\underline{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{\underline{0}\}$ gibt mit $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$.

$\underline{v}$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Der Untervektorraum $Eig_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \{ \underline{v} \in \mathbb{K}^n \mid \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v} \}$ heißt Eigenraum zum Eigenwert λ.

Berechnung: Suche λ, $\underline{v} \neq \underline{0}$ mit $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} - \lambda \underline{\underline{\mathbb{1}}}_n \underline{v} = \underline{0}$

$$\Leftrightarrow (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{\mathbb{1}}}_n)\underline{v} = \underline{0}$$ lineares Gleichungssystem!

$\Rightarrow$ nichttriviale Lösung ($\underline{v} \neq \underline{0}$), wenn $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{\mathbb{1}}}_n) = 0$

Def: $\chi_{\underline{\underline{A}}}(x) = \det(\underline{\underline{A}} - x \underline{\underline{\mathbb{1}}}_n)$ heißt charakteristisches Polynom von $\underline{\underline{A}}$.

Es gilt: λ ist Eigenwert von $\underline{\underline{A}} \Leftrightarrow \chi_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = 0$ (Nullstelle von $\chi_A(x)$)
$\quad \underbrace{}_{\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{\mathbb{1}}})}$

Bsp.: (i) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: λ Eigenwert $\Leftrightarrow |\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{\mathbb{1}}}| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = -1$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$: $(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{\mathbb{1}}})\underline{v}_1 = \underline{0}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow v_1^{(1)} = v_2^{(1)} \Rightarrow Eig_{\underline{\underline{A}}}(1) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\underline{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = -1$: $(\underline{\underline{A}} + 1\,\mathbb{1})\,\underline{v}_2 = \underline{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} +1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1^{(2)} = -v_2^{(2)}$$

$$\Rightarrow \underline{v}_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \mathrm{Eig}_{\underline{\underline{A}}}(-1) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

(ii) Rotation um $\frac{\pi}{4} = \varphi$ (also 45°)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 \overset{!}{=} \chi_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = |\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{2}$$

keine Nullstellen in $\mathbb{R}$, aber $\mathbb{C}$: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

- Im Komplexen ($\underline{\underline{A}} \in \mathbb{C}^{n\times n}$) faktorisiert: $\chi_{\underline{\underline{A}}}(x) = (\lambda_1 - x)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_r - x)^{k_r}$

  mit $k_1 + \ldots + k_r = n$.

  k_i heißt algebraische Vielfachheit

- $\dim \mathrm{Eig}_{\underline{\underline{A}}}(\lambda)$ heißt geometrische Vielfachheit.

  $\dim \mathrm{Eig}_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) > 1$: λ ist entartet.

6.11 Coordinate transformation (change of basis)

$\mathbb{K}$ vector space V with 2 basis sets: $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$, $C = \{\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n\}$

$$\Rightarrow \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \underline{c}_i \Leftrightarrow \underline{v}_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

coordinates w.r.t. B and C, resp.

- transformation matrix: $\underline{v}_C = {}_C\underline{\underline{M}}_B \, \underline{v}_B =: \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{v}_B$ given by

$$ {}_C\underline{\underline{M}}_B = \begin{pmatrix} | & & | \\ (\underline{b}_1)_C & \cdots & (\underline{b}_n)_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

- $L: V \to V$ linear map:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "k_B"'] & V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "k_B"] & V \arrow[d, "k_C"] \\
\underline{u}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_B\underline{\underline{L}}_B"'] & \underline{v}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_C\underline{\underline{M}}_B = \underline{\underline{S}}^{-1}"'] & \underline{v}_C \in \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \underline{v}_B = {}_B\underline{\underline{L}}_B \, \underline{u}_B$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1} \underline{v}_B}_{\underline{v}_C} = \underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1} {}_B\underline{\underline{L}}_B \underline{\underline{S}}}_{{}_C\underline{\underline{L}}_C} \; \underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1} \underline{u}_B}_{\underline{u}_C}$$

$$\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{1}}$$

6.12 Eigenvalue problem

- $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{K}$ eigenvalue of $\underline{\underline{A}}$ if $\underline{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{\underline{0}\}$ exists with

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$$

($\underline{v}$: Eigenvektor)

- subspace $\mathrm{Eig}_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \{ \underline{v} \in \mathbb{K}^n \mid \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v} \}$: eigenspace (Eigenvektorraum)

- Characteristic polynomial: $\chi_{\underline{\underline{A}}}(x) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}})$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

- λ eigenvalue of $\underline{\underline{A}} \Leftrightarrow \chi_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = 0$

- $\chi_{\underline{\underline{A}}}(x) = \underbrace{(\lambda_1 - x)^{k_1} \dots (\lambda_r - x)^{k_r}}_{\text{factorization of } \chi_{\underline{\underline{A}}}}$ with $k_1 + \dots + k_r = n$

- k_i: algebraic multiplicity

- $\dim \mathrm{Eig}_{\underline{\underline{A}}}(\lambda)$: geometric multiplicity

- $\dim \mathrm{Eig}_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) > 1$: λ is called degenerate (entartet).

Bsp.: (i) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \quad \text{mit } \dim \mathrm{Eig}_A(\lambda) = \mathbb{R}^2$$

(ii) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$$= -\lambda(2-\lambda) + 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$= (\lambda - 1)^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Aber $\underline{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$ ist einziger Eigenvektor

Test: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0}$

6.13 Diagonalisieren

$L: V \to V$ mit Matrix ${}_C\underline{\underline{L}}_C$ bzgl. Basis C

Aufsuchen Basis $\underline{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ aus Eigenvektoren von ${}_C\underline{\underline{L}}_C$

$${}_C\underline{\underline{L}}_C \, \underline{b}_i = \lambda_i \underline{b}_i$$

$$\Rightarrow {}_B\underline{\underline{L}}_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ Diagonalform.}$$

Bilden die Eigenwerte

Test: $\left({}_B\underline{\underline{L}}_B\right)_{ij} = \left(\underline{\underline{S}}^{-1} \, {}_C\underline{\underline{L}}_C \, \underline{\underline{S}}\right)_{ij}$

$$= \sum_k (S^{-1})_{ik} \sum_\ell ({}_C\underline{\underline{L}}_C)_{k\ell} \underbrace{S_{\ell j}}_{(\underline{b}_j)_{C,\ell}}$$

$$= \sum_k (S^{-1})_{ik} \sum_\ell ({}_C\underline{\underline{L}}_C)_{k\ell} (\underline{b}_j)_{C,\ell}$$

$$= \sum_k (\underline{\underline{S}}^{-1})_{ik} \quad \lambda_j \underbrace{(\underline{b}_j)_{C,k}}_{\downarrow}$$

$$\underline{\underline{S}} = \left((\underline{b}_1)_C \ \dots \ (\underline{b}_n)_C \right)$$

$$= \lambda_j \underbrace{\sum_k (\underline{\underline{S}}^{-1})_{ik} \ (\underline{\underline{S}})_{kj}}_{\delta_{ij}}$$

$$= \lambda_j \delta_{ij}$$

Def: Eine Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn eine invertierbare Matrix $\underline{\underline{S}}$ existiert, sodass $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{S}}$ Diagonalform hat

Satz: $\underline{\underline{A}}$ ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Basis aus Eigenvektoren.

(Basistransformationsmatrix $\underline{\underline{S}} = (\underline{b}_1 \dots \underline{b}_n)$)

7. Differenzialgleichungen

7.1 Beispiel

- Newtonsche Bewegungsgleichung: $m\underline{\ddot{r}} = \underline{F}(\underline{r})$ für freien Fall: $\underline{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ddot{z}(t) = -g$ (lineare, inhomogene DGL 2. Ordnung)

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung durch zweimaliges Integrieren:

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -gt + v_0 \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0 \end{aligned}\right\} v_0, z_0: \text{Integrationskonstanten}$$

gg. der Anfangsbedingungen

$z_0(0) = h,\ v_0(0) = 0$

$\Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$

7.2 Begriffe

- gewöhnliche DGL: nur Funktionen einer Variablen
- partielle " : Funktionen mehrerer Variablen
- DGL n-ter Ordnung: enthält bis n-te Ableitungen
- Menge aller Lösungen (allgemeine Lösung) enthält n Integrationskonstanten (durch Anfangs- oder Randbedingungen festgelegt)
- lineare DGL: enthält Funktion und Ableitung in 1. Potenz.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} = b(x)$$

- inhomogene DGL: mit additivem Term: $b(x) \neq 0$
- homogene DGL: ohne — " —— : $b(x) = 0$

($y(x) = 0$ ist Lösung)

7.3 Lösungsstrategien

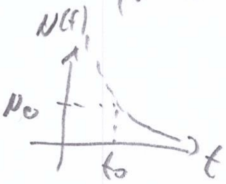
(i) direkte Integration: $\overset{\frac{dy}{dx}}{y'(x)} = f(x) \Rightarrow y(x) = \int_{x_0}^{x} dx'\, f(x')$ (s. 7.1)

(ii) Trennung der Variablen: $y'(x) = g(y(x))\, h(x) \rightsquigarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx$

Integrale lösen & nach $y(x)$ auflösen

Bsp: $\dot N(t) = -\alpha N(t) \rightsquigarrow \int_{N_0}^{N} \frac{1}{N'}\, dN' = -\alpha \int_{t_0}^{t} dt'$

(radioaktiver Zerfall)



$\Rightarrow \ln N - \ln N_0 = -\alpha(t-t_0)$

$\Rightarrow \quad N(t) = N_0 e^{-\alpha(t-t_0)}$

$e^{c} = N_0 e^{+\alpha t_0}$ für allgemeine Lsg.

(iii) Ansatz/Raten: Kandidaten: exp, sin, cos, Polynome...

Bsp: $y''(x) = \alpha^2 y(x)$: Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} = \alpha^2 e^{\lambda x}$ erfüllt DGL für $\lambda_{1/2} = \pm\alpha$

$\Rightarrow$ partikuläre Lösungen $C_1 e^{\alpha x}$, $C_2 e^{-\alpha x}$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$

2 Integrationskonstanten

(iv) Variation der Konstanten: für lineare, inhomogene DGL.

Bsp: $y'(x) = y(x) + x^2$

(a) $y'(x) = y(x)$ (homogen) $\Rightarrow y_{hom}(x) = c\, e^{x}$

(b) $c \to c(x)$: $c'(x) e^{x} + \cancel{c(x) e^{x}} = \cancel{c(x) e^{x}} + x^2$

$\Rightarrow c'(x) = x^2 e^{-x}$

$\Rightarrow \overset{\text{P.I.}}{\ldots} \Rightarrow c(x) = -(x^2+2x+2)e^{-x} + d$

$\Rightarrow y(x) = \left[-(x^2+2x+2)e^{-x} + d\right] e^{x} = -(x^2+2x+2) + d\,e^{x}$

(v) Potenzreihenansatz: Ansatz: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad a_n \in \mathbb{C}$

Bestimme a_n, sodass DGL erfüllt ist für alle x (im Definitionsbereich)

$\Rightarrow$ ggf. nur im Konvergenzbereich der Reihe

7.4 Lineare inhomogene DGLs

DGLs der Form: $L[y(x)] = b(x)$ $\Rightarrow$ $y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x)$

$\uparrow$ linearer Differenzialoperator $\qquad L[y_{hom}(x)] = 0 \qquad L[y_p(x)] = b(x)$

Bsp: $\ddot{y}(t) + 2\gamma \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = F(t)$

hier: $\gamma = 0$: angetriebener, harmonischer Oszillator

$F(t) = f_0 \cos(\Omega t)$

$\Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = f_0 \cos(\Omega t)$

(a) homogen: $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \Rightarrow y_{hom}(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)$

$\equiv A \sin(\omega_0 t + \varphi)$

(b) partikuläre Lsg: Ansatz: $y_p(t) = \alpha \cos(\omega t)$

$\Rightarrow -\alpha \omega^2 \cos(\omega t) + \alpha \omega_0^2 \cos(\omega t) = f_0 \cos \Omega t$

erfüllt durch $\omega = \Omega$, $\alpha = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}$ (nur für $\omega_0 \neq \Omega$) keine Resonanz!

$\Rightarrow y_p(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t)$

$\Rightarrow y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{f_0}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t)$

Fall $\omega_0 = \Omega$? (b): $y_p(t) = \alpha t \sin(\omega_0 t)$

$\Rightarrow -\alpha t \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + 2\alpha \omega_0 \cos(\omega_0 t) + \alpha \omega_0^2 t \sin(\omega_0 t) = f_0 \cos(\omega_0 t)$

erfüllt für $\alpha = \frac{f_0}{2\omega_0}$

$\Rightarrow$ Für $\omega_0 = \Omega$: $y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \underbrace{\frac{f_0}{2\omega_0} t}_{\text{Amplitude wächst!}} \sin(\omega_0 t)$

6.13 Diagonalisation

- $L: V \to V$ with representing ~~matrix~~ $\underset{C=C}{L}$ (w.r.t. basis C)
- $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ alternative basis of eigenvectors of $\underset{C=C}{L}$: $\underset{C=C}{L}\,\underline{b}_i = \lambda_i \underline{b}_i$
- $\underset{B=B}{L} = \underline{\underline{S}}^{-1} \underset{C=C}{L} \underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ with $\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \underline{b}_1 & \dots & \underline{b}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

Thm: $\underline{\underline{A}}$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ There is a basis of eigenvectors

7 Differential equations

7.1 Example

$\ddot{z}(t) = -g \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + z_0$, v_0, z_0 initial conditions

$z_0 = z(0)$, $v_0 = \dot{z}(0)$

7.2 Nomenclature

- ordinary DEq
- partial DEq
- DEq. of n-th order
- general solution contain n constants (determined by initial or boundary values)
- linear DEq. $a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} = b(x)$
- inhomogeneous DEq : $b(x) \neq 0$
- homogeneous DEq : $b(x) = 0$ ($y(t) = 0$ is trivial solution

7.3 Solving Differential equations

(i) direct integration

(ii) separation of variables

(iii) ansatz

(iv) variation of constants (linear inhomogeneous DEq)

(v) power series

7.4 Linear Inhomogeneous DEqs

- $L[y(x)] = b(x) \Rightarrow y(t) = y_h(x) + y_p(x)$

$L[y_h(x)] = 0$ homogeneous solution

$L[y_p(x)] = b(x)$ particular solution

- ex: $\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = f_0 \cos(\Omega t)$

(a) homogeneous: $\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0 \Rightarrow y_h(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)$
$= A \sin(\omega_0 t + \varphi)$

(b) particular solution: ansatz: $y_p(t) = \alpha \cos(\omega t)$

$\Rightarrow \omega = \Omega \quad , \quad \alpha = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \Rightarrow y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t)$

what about $\omega_0 = \Omega$?

Nachfrag: $y'(x) = y(x) + x^2$ Y6C

(a) $y'(x) = y(x) \Rightarrow y_h(x) = Ce^x$

(b) $C \to C(x) \Rightarrow C'(x) = x^2 e^{-x}$

partielle Integration:

$$C(x) = \int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx$$

$$\int f g' = fg - \int f' g$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx$$

$$\int f g'$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2 \left(-x e^{-x}\right) + 2 \int e^{-x} dx$$

$$fg \quad - \int f' g$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2 e^{-x} + d$$

$$= -(x^2 + 2x + 2) e^{-x} + d \quad \checkmark$$

F.3 (v) Potenzreihenansatz:

Bsp.: $(1-x^2)y''(x) - 4xy'(x) - 2y(x) = 0$

Kategorie: linear, homogene DGL mit nicht konstanten Koeffizienten

Lösung: $y(x) = \frac{1}{1-x^2} = (1-x^2)^{-1}$ $\quad |x|<1$

Test: $y'(x) = +\frac{2x}{(1-x^2)^2}$

$$y''(x) = \frac{2}{(1-x^2)^2} + \frac{2x\,2(1-x^2)\,2x}{(1-x^2)^3}$$

$$\Rightarrow \cancel{(1-x^2)}\frac{2}{(1-x^2)^{\cancel{2}}} + \cancel{(1-x^2)}\frac{8x^2(1-x^2)}{(1-x^2)^3} - 4x\frac{2x}{(1-x^2)^2} - \frac{2}{(1-x^2)} = 0$$

$$\cancel{\frac{2}{1-x^2}} + \cancel{\frac{8x^2}{1-x^2}} - \cancel{\frac{8x^2}{1-x^2}} - \cancel{\frac{2}{1-x^2}} = 0 \quad ✓$$

Potenzreihe: (Entwicklung um $x_0=0$) $\quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\Rightarrow y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Einsetzen:

$$0 = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Indexverschiebung:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{n} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} x^n\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n(n-1) \quad + 4n \quad + 2)a_n\right]$$

$$+ 2a_2 + 6a_3 x \quad - 4a_1 x \quad - 2a_0 - 2a_1 x$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} x^n\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2+3n+2)a_n\right] + 6(a_3 - a_1)x + 2a_2 - 2a_0$$

Idee: Potenzreihe gleich Null ($\sum_{k=0}^{\infty} 0 x^k$), wenn alle

Koeffizienten Null sind:

$\hookrightarrow x^0$: $0 = 2a_2 - 2a_0 \Rightarrow a_2 = a_0$

x^1: $0 = 6(a_3 - a_1) \Rightarrow a_3 = a_1$

$n \geq 2$: $0 = \underbrace{(n+2)(n+1)}_{n^2+3n+2} a_{n+2} - (n^2+3n+2) a_n \Rightarrow a_{n+2} = a_n$

$\Rightarrow$ alle a_n aus a_0 und a_1 bestimmt (Integrationskonstanten!)

Etwa: $a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$: $a_n = \begin{cases} a_0 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 x^{2k} = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometrische} \\ \text{Reihe}}}{=} \frac{a_0}{1-x^2} \qquad |x| < 1$$

allgemeine Lösung: $y(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x}{1 - x^2}$, $|x| < 1$

7.4 Linear inhomogeneous DEs

$L[y(x)] = b(x) \Rightarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

homogeneous solution $L[y_h(x)] = 0$ particular solution $L[y_p(x)] = b(x)$

7.3 (v) Power series

ansatz: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1}, \; y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) (x-x_0)^n$

↳ insert into DE

↳ sort by powers of x

↳ determine a_n by comparison of coefficients

↳ recurrence equations for a_n

7.5 Partielle DGLs

Bsp.: (i) Laplace-Gleichg.: $\Delta\phi \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi = 0$

(ii) Wellengleichg.: 1D $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = 0$

3D $\underbrace{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)}_{=:\,\Box \text{ D'Alembert-Operator}} u(\underline{x},t) = 0$

(iii) Diffusionsgleichg.:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

(iv) Navier-Stokes Gleichg. (inkompressible Strömungen):

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v} - \Delta\underline{v} = -\underline{\nabla}p \qquad \text{mit } \underline{\nabla}\cdot\underline{v} = 0$$

$\underline{v}$: Strömungsgeschwindigkeit, p: Druck

(v) Korteweg-de-Vries-Gleichg.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

: Ausbreitg. von Wellen in flachem Wasser

↳ Solitonen (Wellenberg mit Geschwindigkeit c)

$$u(x,t) = v(\underbrace{x-ct}_{=:\,z}) \equiv v(z)$$

mit $v(z), v'(z), v''(z) \to 0$ für $z\to\infty$

$\Rightarrow -c\,v'(z) + 6\,v(z)\,v'(z) + v'''(z) = 0$

$$\frac{d}{dz}\underbrace{\left(-c\,v(z) + 3\,v(z)^2 + v''(z)\right)}_{=\text{konstant} = 0 \text{ wegen Randbed.}} = 0$$

$$\hookrightarrow \; -c\,v(z) + 3v(z)^2 + v''(z) = 0 \qquad | \cdot v'(z)$$

$$\hookrightarrow \; \frac{d}{dz}\underbrace{\left(-\frac{c}{2}v(z)^2 + v(z)^3 + \frac{1}{2}v'(z)^2\right)}_{=0} = 0$$

$$\hookrightarrow \; \frac{1}{2}\underbrace{v'(z)^2}_{\left(\frac{d}{dz}v(z)\right)^2} + v(z)^2\left(v(z) - \frac{c}{2}\right) = 0$$

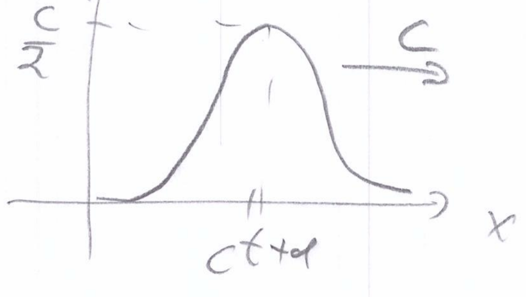
$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dz}v(z)\right)^2 = v(z)^2\left(c - 2v(z)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dv(z)}{dz} = v(z)\sqrt{c - 2v(z)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{v\sqrt{c-2v}}\,dv = \int dz$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow v(z) = \frac{c}{2}\,\frac{1}{\cosh^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(z-d)\right]} = \frac{c}{2}\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}z\right]$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{c}{2}\,\frac{1}{\cosh^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct-d)\right]}$$



Amplitude $\leftrightarrow$ Geschwindigkeit

(vi) Separationsansatz: 101

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x,t) - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x,t) = 0 \quad , \quad \text{Randbed.: } \rho(0,t) = \rho(L,t) = 0$$

Diffusionsgleichung $\qquad \rho(x,t=0) = \rho_0(x)$

Ansatz: $\rho(x,t) = X(x)\, T(t)$

$$\Rightarrow X(x)\, \dot{T}(t) = D\, T(t)\, X''(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{D} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)}}_{\text{nur } t} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{nur } x} =: -k^2$$

$$\Rightarrow \dot{T} + k^2 D\, T = 0 \quad \Rightarrow T(t) = T_0 e^{-k^2 D t}$$

$$X'' + k^2 X = 0 \quad \Rightarrow X(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

$X(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$X(L) = 0 \Rightarrow A = 0$ oder $\sin(kL) = 0$

$$\Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\Rightarrow \rho(x,t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x)}\, \underbrace{e^{-k_n^2 D t}}$$

Überlagerung von Sin, die schneller zerfließen je größer k_n ist

mit Anfangsverteilung:

$$\rho_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x)$$

$$\Rightarrow \int_0^L dx\, \rho_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right)}_{= \frac{L}{2} \delta_{mn}}$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \rho_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad \text{(Fourier-Reihe)}$$

$\rho(x,0) = \rho_0(x)$ bestimmt Koeffizienten A_n

7.6 System von DGLs

Idee: Umschreiben von DGL n-ter Ordnung auf System von n DGLs 1. Ordnung:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

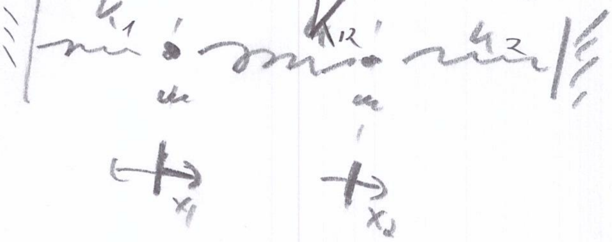
$$\hookrightarrow \left.\begin{aligned} y_1 &:= y \\ y_2 &:= y' \\ &\vdots \\ y_k &:= y^{(k-1)} \quad (k = 2, \dots, n) \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}\right\} \text{ alles 1. Ordnung}$$

Bsp.: $\ddot{x} = \frac{1}{m} F(x)$

$$\hookrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= x \quad \text{O.t.} \\ x_2 &= \dot{x} \quad \text{Geschwindigkeit} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m} F(x_1) \end{aligned}$$

Falls rechte Seite linear: $\underline{y}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}$ mit $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$

Bsp.:



$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -k_2 x_2 - k_{12}(x_2 - x_1) \end{aligned}\right\} \quad m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 - k_{12} & k_{12} \\ k_{12} & -k_2 - k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$m\ddot{\underline{x}} = \underline{\underline{K}}\,\underline{x}$$

Lösen mit Ansatz: $\underline{x}(t) = e^{\lambda t}\underline{u}$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{x}}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}\underline{u} \Rightarrow \text{Eigenwertgleichung in } \lambda^2$$

$k_1 = k_2 = k$

$\Rightarrow \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ ... $\lambda_2 = \pm i\sqrt{\frac{2k_{12} + k}{m}}$ ... $i\omega$, Eigenfrequenz

Nachtrag / Recap: Lin. Alg.:

Def.: Das komplexe Skalarprodukt zwischen $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{C}^n$ ist definiert

als: $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i = (\underline{a}^*)^T \underline{b}$

QM-Schreibweise

- positiv definit: $\underbrace{\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle}_{} \geq 0$

$(\underline{a}^*)^T \underline{a} = Re(a_1)^2 + Im(a_1)^2 + \ldots + Re(a_n)^2 + Im(a_n)^2$

$\Rightarrow \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{a} = \underline{0}$

- bilinear: $\langle \underline{a} + \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle + \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle$

$\langle \underline{a}, \lambda \underline{b} \rangle = \lambda \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$

$\langle \lambda \underline{a}, \underline{b} \rangle = \lambda^* \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$

- $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \overline{\langle \underline{b}, \underline{a} \rangle}$ (hermitesch)

Begriffe:

(a) Transponierte: $(\underline{\underline{A}}^T)_{ij} = (\underline{\underline{A}})_{ji}$

(b) Adjungierte / hermitesch transponierte: $\underline{\underline{A}}^+ = (\underline{\underline{A}}^T)^*$, $(\underline{\underline{A}}^+)_{ij} = a_{ji}^*$

$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^+ = \underline{\underline{B}}^+ \underline{\underline{A}}^+$

(c) symmetrisch $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$

(d) orthogonal: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}^{-1}$ $\Rightarrow \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \mathbb{1}$

$\Rightarrow$ Zeilen- & Spaltenvektoren bilden Orthonormalsystem

$(\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}})_{ij} = \delta_{ij} = \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j$

(e) unitär: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$: $\underline{\underline{A}}^+ = \underline{\underline{A}}^{-1}$ $\Rightarrow \underline{\underline{A}}^+ \underline{\underline{A}} = \mathbb{1}$, $(\underline{\underline{A}}^+ \underline{\underline{A}})_{ij} = \delta_{ij} = \langle \underline{a}_i, \underline{a}_j \rangle$

(f) hermitesch / selbstadjungiert: $\underline{\underline{A}}^+ = \underline{\underline{A}}$

(etwa Operatoren d. Observablen i. QM)

(g) Sei $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine
- hermitesche
- reell symmetrische

Matrix.

Dann gilt:

(a) $\underline{\underline{A}}$ hat n reelle Eigenwerte

(b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

(c) $\underline{\underline{A}}$ ist
- unitär
- orthogonal

diagonalisierbar, d.h. es existiert eine
- unitäre
- orthogonale

Matrix $\underline{\underline{S}}$ mit
- $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}^{*} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{S}}$
- $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{S}}$