1. Übung TP1a

1.1 Ableitungen

Erinnerung: Ableitungsregeln:

(i) Linearität:

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{dg}{dx}$$

(ii) Produktregel:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) g(x)\right) = \frac{df}{dx} g + f \frac{dg}{dx}$$

(iii) Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

Erinnerungsstütze: "Erweitern" mit dg

(iv) Umkehrfkt.: $y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{df}{dx}}$$

Erinnerungsstütze:

$$\frac{dx}{dy}\,\frac{dy}{dx}=1 \qquad \text{"Kehrwert" der Ableitung}$$

Quotientenregel ergibt sich aus (ii)+(iii).

Aufgaben: $f'(x)=?$

(a) $f(x)=x^2(1-x)=x^2-x^3$

$\Rightarrow f'(x)=2x-3x^2=x(2-3x^2)$

(b) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

$\Rightarrow f'(x)=\cos x\cdot\frac{1}{x}-\sin x\,\frac{1}{x^2}$

$=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

(c) $f(x)=\ln(4x^2) \Rightarrow f'(x)\overset{(*)}{=}\frac{1}{4x^2}\,8x=\frac{2}{x}$

(*) $y=\ln x \Rightarrow x=e^y;\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}$ //

(d) $f(x) = \frac{x^3+3}{(x+1)^3}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x+1)^3 - (x^3+3)3(x+1)^2}{(x+1)^6}$$

$$= \frac{3x^3 + 3x^2 - 3x^3 - 9}{(x+1)^4} = \frac{3x^2-9}{(x+1)^4}$$

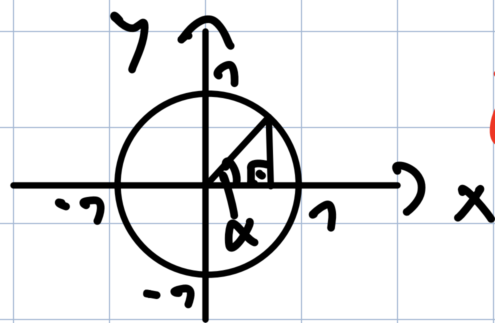
(e) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\cos^2 x}$$

(*) Pythagoras

$\cos\alpha = \frac{A}{H} = A$

$\sin\alpha = \frac{G}{H} = H$



Ankathete

Gegen-..

Hypotenuse

$$A^2 + G^2 = H^2 \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

(vi) $f(x) = \pi^x = e^{\ln(\pi^x)} = e^{x\ln\pi}$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{x\ln\pi}\ln\pi = \ln\pi \cdot \pi^x$$

1.2 Integration

"Inverse" der Ableitung, denn Stammfkt. $F(x)$ zur Fkt. $f(x)$ ist definiert über:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \Rightarrow F(x) + C = \int dx\, f(x)$$

mit $C = \text{const.}$

Fundamentalsatz: $\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)$

Linearität: $\int dx\, \alpha f(x) + \beta g(x)$

$$= \alpha \int dx\, f(x) + \beta \int dx\, g(x)$$

Aufgaben:

(a) $\int_0^2 dx\, (x^3 - 3x^2 - 1) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - x \Big|_0^2 = -6$

(b) $\int dx \left[5e^{3x-1} + \cos(4x-1)\right]$

$$= \frac{5}{3}e^{3x-1} + \frac{1}{4}\sin(4x-1) + C$$

(c) $\int dx\, \frac{1}{x^2} = \int dx\, x^{-2} = -x^{-1} + C = \frac{1}{x} + C$

(d) $\int dx\, (e^x - 1)^2 = \int dx\, [(e^x)^2 - 2e^x - 1]$

$$= \int dx\, [e^{2x} - 2e^x - 1] = \frac{1}{2} e^{2x} - 2e^x - x + C$$

(e) $\int dx\, (1 - x^2) e^{-x^2/2} =: I$

Idee: Stammfkt. muss $e^{-x^2/2}$ enthalten.

Ansatz: $I = f(x) e^{-x^2/2}$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dx} = \frac{df}{dx} e^{-x^2/2} - \frac{2x}{2} f(x) e^{-x^2/2}$$

$$= e^{-x^2/2} \left[\frac{df}{dx} - x f(x)\right] \stackrel{!}{=} e^{-x^2/2} (1 - x^2)$$

Idee: f ist vermutlich ein Polynom. Dann hat df/dx einen niedrigeren Grad als $x \cdot f$.

$\Rightarrow$ Koeff.-Vgl.: $\frac{df}{dx} = 1 \Rightarrow f(x) = x + C \stackrel{!}{=} x$

$\Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow \int dx\, (1 - x^2) e^{-x^2/2} = x e^{-x^2/2}$$

1.3 Taylor-Entwicklung

Taylor-Formel: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

mit $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ dem Taylor-Polynom,

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ dem (Lagrange-) Restglied,

$\xi \in (x, x_0)$

der Ordnung n und der Entwicklungsstelle x_0.

Bsp.: $\cos(x)$ um $x_0 = 0$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos x & &\xrightarrow{x=0} & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= -\sin x & &\longrightarrow & f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= -\cos x & &\longrightarrow & f''(0) &= -1 \\
f'''(x) &= \sin x & &\longrightarrow & f'''(0) &= 0 \\
f^{(4)}(x) &= \cos x & &\longrightarrow & f^{(4)}(0) &= 1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Exakte Darstellung von Kosinus als Taylorreihe:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$= \frac{1}{0!} x^0 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \mathcal{O}(x^6)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

Fehler abschätzen: Für $-\pi \leq x \leq \pi$:

$$|R_n(x;x_0)| \leq \sup_{|\xi| \leq \pi} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right|$$

Da $|\cos x| \leq 1$ und $|\sin x| \leq 1$ beide beschränkt sind, gilt

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |x^{n+1}|$$

Der maximale Wert wird also an den Intervallrändern $x = \pm\pi$ angenommen.

$$\Rightarrow \quad |R_n(x)| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

z.B. bis zur 4. Ordnung:

$$|R_4| \leq \frac{\pi^5}{5!} \approx 2{,}55$$

oder exakt, z.B. per wolframalpha:

cos(x) - (1-1/2*x^2+1/4!*x^4) at x=3.14159

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT | EXTENDED KEYBOARD | EXAMPLES | UPLOAD | RANDOM

Input interpretation

$$\cos(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right) \text{ where } x = 3.14159$$

n! is the factorial function

Result

-1.1239

fyi: "pi" ist π, aber dann gibt es das Ergebnis nicht in Dezimaldarstellung.

Plot

plot cos(x), (1-1/2*x^2), (1-1/2*x^2+1/4!*x^4), (1-1/2*x^2+1/4!*x^4-1/6!*x^6) from -pi to pi

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT | EXTENDED KEYBOARD | EXAMPLES | UPLOAD | RANDOM

Input interpretation

plot	$\cos(x)$	$x = -\pi$ to π
	$1 - \frac{1}{2} x^2$	
	$1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4$	
	$1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6$	

$n!$ is the factorial function

Plot