WiSe 2024/25 Übung 7

Vektorprodukt

Gegeben sind die Vektoren $\boldsymbol{a} = (1, 2, 0)^T, \boldsymbol{b} = (2, -1, 1)^T$ und $c = (-1, -1, 3)^T$

a) Berechnet $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

b) Berechnet mit Hilfe des Kreuzproduktes den Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$. Um euer Ergebnis zu kontrollieren, berechnet den Winkel erneut mit Hilfe des Skalarprodukts.

c) Berechnet $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$.

d) Ist das doppelte Kreuzprodukt assoziativ? Berechnet dazu $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$.

e) Zeigt, das die BAC-CAB-Regel erfüllt ist, indem ihr auch die linke Seite der Gleichung berechnet.

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

f) Beweist die BAC-CAB Regel für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

Levi-Civita-Symbol

Das Levi-Civita-Symbols wird zum Beispiel genutzt, um Vektorprodukte kompakter zu schreiben und ist für $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ folgendermaßen definiert:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \\ -1 & \text{wenn } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Wie viele Permutationen hat das Tripel (1,2,3)?

b) Welche dieser Permutationen sind ungerade bzw. gerade?

c) Wann ist $\epsilon_{ijk} = 0$?

d) Nutzt die Aufgabenteile a), b) und c), um alle Werte von ϵ_{ijk} aufzuschreiben.

e) Beweist erneut die BAC-CAB-Regel, diesmal mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols. **Hinweis:** Nutzt $\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{lj}$.

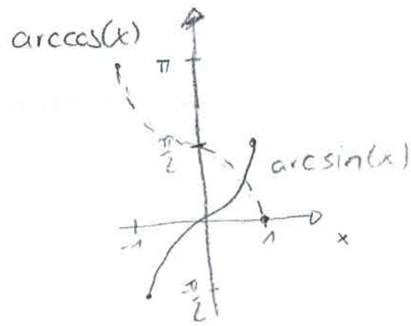
TPIa_WS 24/25   Übung 7

Vektorprodukt

a) $\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\underline{b} \times \underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -(\underline{a} \times \underline{b})$

b) $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin\alpha$



$|\underline{a}| = \sqrt{5} \quad |\underline{b}| = \sqrt{6} \quad |\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{30}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}\sqrt{6}} = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$

Skalarprodukt: $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos\alpha$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = 2 - 2 = 0 \qquad \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ ✓

c) $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{a} \times \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \neq \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$

$\rightarrow$ nicht associativ

e) $\underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (-1 - 2) = -3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b}) = 0$

$\rightarrow \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$

f) z.z $\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})$

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{a}\times\begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_3c_3 + a_1c_1) - c_2(a_3b_3 + a_1b_1) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1(\underline{a}\cdot\underline{c}) - b_1a_1c_1 - c_1(\underline{a}\cdot\underline{b}) + c_1a_1b_1 \\ b_2(\underline{a}\cdot\underline{c}) - b_2a_2c_2 - c_2(\underline{a}\cdot\underline{b}) + c_2a_2b_2 \\ b_3(\underline{a}\cdot\underline{c}) - b_3a_3c_3 - c_3(\underline{a}\cdot\underline{b}) - c_3a_3b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}(\underline{a}\cdot\underline{b})$$

$$= \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})$$

Levi-Civita-Symbol

a) $(1,2,3)$; $(2,3,1)$; $(3,1,2)$ -> gerade Permutation
b) gerade Anzahl an Vertauschungen

$(1,3,2)$; $(2,1,3)$; $(3,2,1)$ -> ungerade Permutation
ungerade Anzahl an Vertauschungen

c) wenn zwei Indizes gleich

d) $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$

$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$

sonsd null, zB $\varepsilon_{111} = \varepsilon_{112} = \ldots = 0$

c) z.z. $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$

Betrachte i-te Komponente:

$$[\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})]_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_j\, (\underline{b} \times \underline{c})_k$$

$$= \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_j \sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{klm}\, b_l\, c_m$$

$$= \sum_{j,k,l,m} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{klm}\, a_j\, b_l\, c_m$$

mit Hinweis

$$= \sum_{j,l,m} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, a_j\, b_l\, c_m$$

$$= \sum_j a_j b_i c_j - a_j b_j c_i$$

mit $\sum_j a_j b_j = \underline{a} \cdot \underline{b}$

$$= b_i(\underline{a} \cdot \underline{c}) - c_i(\underline{a} \cdot \underline{b})$$