WiSe 2024/25 Übung 9

Wegintegral - Mechanische Arbeit

Gegeben ist das Kraftfeld

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2y - x \end{pmatrix}$$

Die durch diese Kraft entlang eines Weges $\mathcal{C}$ verrichtete Arbeit W ist definiert durch:

$$W = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

a) Bestimmt W für folgende Wege $\mathcal{C}_i$

- $\mathcal{C}_1$: Gerade von (0,0) nach (1,1)
- $\mathcal{C}_2$: Entlang der x-Achse von (0,0) nach (1,0) und anschließend parallel zur y-Achse von (1,0) nach (1,1)
- $\mathcal{C}_3$: von (0,0) nach (1,1) entlang der Kurve $y = x^2$

Skizziert euch dazu zunächst die Wege und bestimmt je die Parametrisierung $\mathbf{r}(t)$, um dann die Arbeit W zu berechnen.

b) Was ist die Arbeit entlang der geschlossenen Wege $\mathcal{C}_4 = \mathcal{C}_2 \cup (-\mathcal{C}_1)$ und $\mathcal{C}_5 = \mathcal{C}_2 \cup (-\mathcal{C}_3)$?

c) Besitzt das Kraftfeld ein Potenzial?

Flussintegral

Betrachtet das Vektorfeld

$$\mathbf{E}(r,\theta,\phi) = \frac{a}{r^2} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a = \text{const.}$$

Im Folgenden soll der Fluss des Feldes durch eine Kugeloberfläche mit Radius R berechnet werden: $\int_F \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$.

a) Wie sieht die Parametrisierung einer Kugeloberfläche mit Radius aus R?

b) Berechnet das Flächenelement $\mathrm{d}\mathbf{A}$ für die Kugeloberfläche.

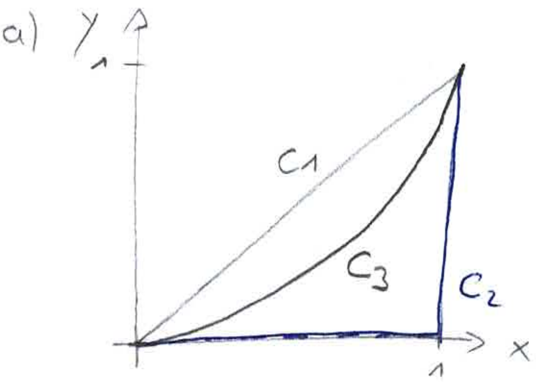
c) Berechnet damit den Fluss von $\mathbf{E}$ durch die Oberfläche.

d) Erkennt ihr, was das Vektorfeld beschreibt? *Hinweis*: $a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$

Übung 9

Wegintegral – Mechanische Arbeit

a)



Parametrisierung, wobei $t \in [0,1]$

C_1: $\underline{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$

C_2: $\underline{r}_{2A}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{r}_{2B}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$

C_3: $\underline{r}_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$

$$W = \int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_C \underline{F} \cdot \frac{d\underline{r}}{dt}\, dt \qquad \underline{F} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2y - x \end{pmatrix}$$

$$W_1 = \int_{C_1} \underline{F} \frac{d\underline{r}_1}{dt}\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 3t - t \\ 2t - t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 (3t - t + 2t - t)\, dt = \int_0^1 3t\, dt = \frac{3}{2}$$

$$W_2 = \int_{C_2} \underline{F} \frac{d\underline{r}_{2A}}{dt}\, dt + \int_{C_2} \underline{F} \frac{d\underline{r}_{2B}}{dt}\, dt$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} 3t \\ -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 3 - t \\ 2t - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 (3t + 2t - 1)\, dt = \left[\frac{5}{2}t^2 - t\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

$$W_3 = \int_{C_3} \underline{F} \frac{d\underline{r}_3}{dt}\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 3t - t^2 \\ 2t^2 - t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 (3t - t^2 + 4t^3 - 2t^2)\, dt = \left[t^4 - t^3 + \frac{3}{2}t^2\right]_0^1$$

$$= 1 - 1 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

b) $C_4 = C_2 \cup (-C_1)$

$$W_4 = \int_{C_4} \underline{F}\, d\underline{r} = \int_{C_2} \underline{F}\, d\underline{r} - \int_{C_1} \underline{F}\, d\underline{r}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$W_5 = \int_{C_2} \underline{F}\, d\underline{r} - \int_{C_3} \underline{F}\, d\underline{r} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

c) Um Potenzial zu besitzen $\rightarrow$ $\underline{F}$ muss ein konservatives Kraftfeld sein.

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \iff \text{konservativ}$$

$$\partial_x (2y - x) - \partial_y (3x - y) = -1 - (-1) = 0$$

$\rightarrow$ $\underline{F}$ ist konservativ, also besitzt ein Potenzial.

Man sieht die Wegunabhängigkeit direkt, da $W_1 = W_2 = W_3$ und für geschlossene Wege ist die Arbeit null (W_4 & W_5)

Flussintegrale

$$\underline{E}(r,\theta,\phi) = \frac{a}{r^2}\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

a)
$$\underline{x} = \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

b)
$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\cos\varphi \\ -R\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \underline{x}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial\theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} R^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ R^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ R^2\sin\theta\cos\theta\,(\cos\varphi^2+\sin\varphi^2) \end{pmatrix}$$

$$= R^2\sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = R^2\sin\theta\,\hat{e}_r$$

$$\rightarrow d\underline{A} = R^2\sin\theta\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} d\theta\, d\varphi = R^2\sin\theta\,\hat{e}_r\, d\theta\, d\varphi$$

c) $\underline{E} = \frac{a}{r^2}\hat{e}_r$

$$\int_F \underline{E}\, d\underline{A} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\, \frac{a}{R^2} R^2 \sin\theta\, \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{\hat{e}_r} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{\hat{e}_r}}_{=1}$$

$$= a\, 2\pi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta = 2\pi a \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= 4\pi a$$

d) $\underline{E}$ ist elektr. Feld einer Punktladung mit Ladung q:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{e}_r$$