- Integration durch Substitution

$$\int_0^z \frac{\sqrt{1+\ln(x+1)}}{x+1}\,dx$$

$$\left\ulcorner\; y(x) = \ln(x+1), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1}, \quad dx = (x+1)\,dy \;\right\lrcorner$$

$$\int_0^{\ln(z+1)} \frac{\sqrt{1+y}}{\cancel{x+1}}\,\cancel{(x+1)}\,dy = \int_0^{\ln(z+1)} \sqrt{1+y}\,dy$$

$$= \frac{2}{3}\left[(1+y)^{3/2}\right]_0^{\ln(z+1)} = \frac{2}{3}\left[\left(1+\ln(z+1)\right)^{3/2} - 1\right]$$

- uneigentliche Integrale

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a x^{-\alpha}\,dx$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1}\, x^{-\alpha+1}\right]_1^a$$

$$\cancel{= \lim_{a\to+\infty} \left(\frac{1}{1-a}\, x^{-a+1}\right)}$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{-\alpha+1}\, a^{-\alpha+1}}_{\to 0} - \frac{1}{-\alpha+1}\, 1^{-\alpha+1}\right)$$

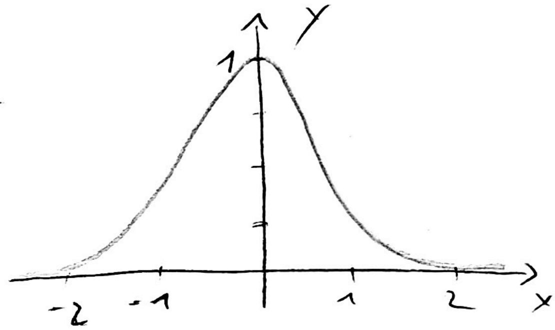
$$= \frac{1}{\alpha-1}$$

- anspruchsvolles Integral zum „Knobeln"
(Tipp: hier müssen mehrere Integrationstricks hintereinander ausgeführt werden)

$$\int_0^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

- **Gauß-Integral**

nicht-normierte Gauß-Fkt $g(x) = e^{-x^2}$



Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Berechnet:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Hinweis: Betrachtet Plot von $g(x)$, ist die Funktion gerade?

Lösung:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

· partielles Ableiten

- einfaches Beispiel zum Bestimmen der partiellen Ableitungen

$$f(x,y,z) = xyz + xy + z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz + x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy + 1$$

- Betrachtet eine Fläche (auch vorstellbar als Höhenprofil eines Gebirges): $h(x,y) = e^{(x+y)^2}$

* Wie sieht das Höhenprofil aus?

* Berechnet die Steigung am Punkt $(x,y) = (0,0)$?

* Wie ändert sich die Steigung im Punkt $(1,1)$?

* Ihr wollt einen möglichst entspannten Spaziergang durch dieses Gebirge machen, ohne Steigung. Könnt ihr eine Bedingung für die x-, y-Koordinaten eures Weges finden, um euch nur im Bereich mit einer Steigung von null zu bewegen?

Lösung:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2(x+y)e^{(x+y)^2} = \frac{\partial h}{\partial y}$$

Steigung in Punkt $(0,0)$ $= 0$

" " " $(1,1)$ $= 4e^4$

Weg mit $2(x+y)e^{(x+y)^2} = 0$ -> für $x = -y$