WiSe 2024/25 Übung 4

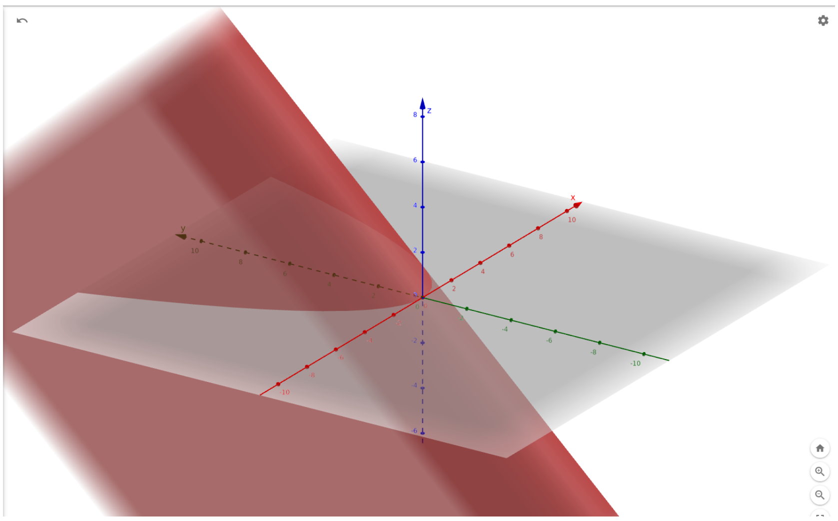
Gradient und Höhenlinien

Zur Erinnerung: Die Änderung einer Funktion f unter einer kleinen Verschiebung $\Delta\vec{x}$ kann als Skalarprodukt mit dem Gradienten $\vec{\nabla} f$ ausgedrückt werden: $\Delta f = (\vec{\nabla} f) \cdot \Delta\vec{x}$.

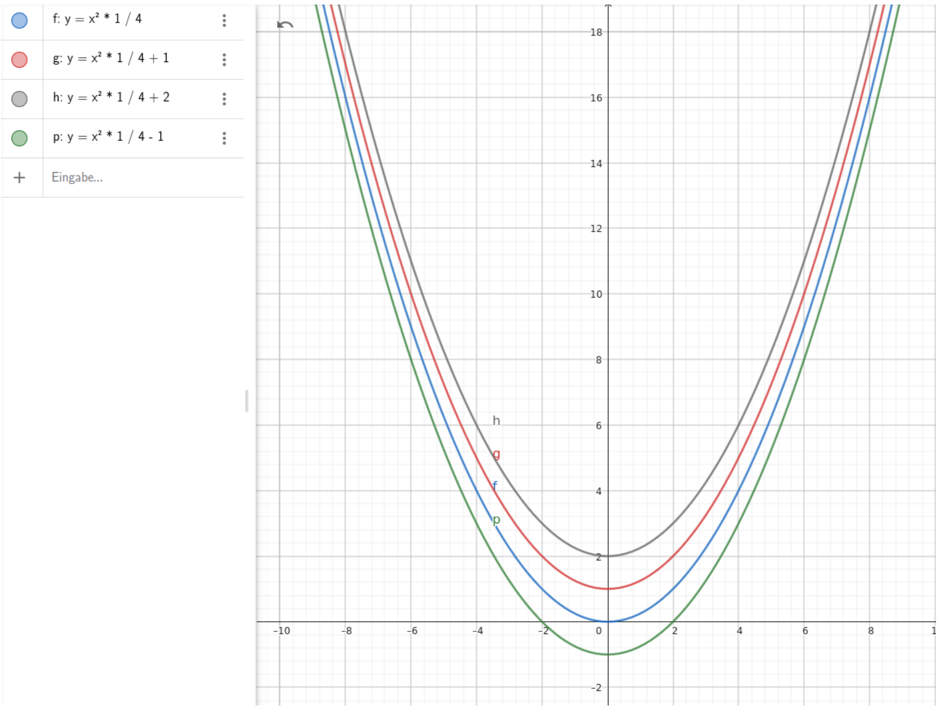
- Warum zeigt der Gradient $\vec{\nabla} f$ immer in die Richtung des steilsten Anstiegs von f?
- Entlang mancher Verschiebungen $\Delta\vec{x}$ ist f konstant. Wie sind solche $\Delta\vec{x}$ relativ zu $\vec{\nabla} f$ orientiert? Verwendet ein analoges Argument wie beim letzten Punkt.
- Betrachtet folgende Funktion: $h(x, y) = y - \frac{1}{4}x^2$. Wie sieht $h(x, y)$ aus? Skizziert in der (x,y)-Ebene die Höhenlinien, auf welchen die Funktion den Wert -1, 0, 1 oder 2 annimmt.
- Berechnet nun den Gradienten von h und tragt den Gradienten auf der Höhenlinie für $h = 0$ an ein paar Stellen ein.

Lösungsskizze:

- $\Delta f = (\vec{\nabla} f) \cdot \Delta\vec{x} = |\vec{\nabla} f||\Delta\vec{x}| \cos\theta$ ist maximal bei $\theta = 0$, also wenn $\vec{\nabla} f$ parallel zu $\Delta\vec{x}$ ist.
- Keine Änderung bedeutet, dass $\Delta f = |\vec{\nabla} f||\Delta\vec{x}| \cos\theta = 0$. Das ist der Fall bei $\theta = \frac{\pi}{2}$ bzw. wenn die Verschiebung Δx senkrecht zum Gradient $\vec{\nabla} f$ steht.
- $h(x, y) = y - \frac{1}{4}x^2$ hat die Form einer schräg in der (x,y)-Fläche liegende Parabelschar:



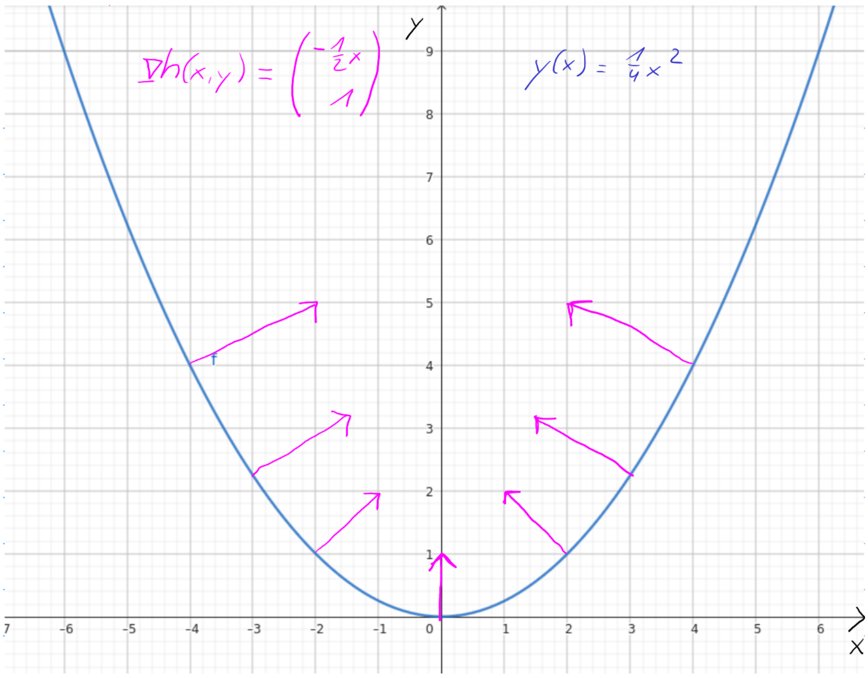
Die Höhenlinien sind ebenfalls parabelförmig, z.B für $h(x, y) = 0 \rightarrow y(x) = \frac{1}{4}x^2$:



- Gradient von $h(x,y)$:

$$\vec{\nabla} h = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eingezeichnet in Höhenlinie bei $h(x,y) = 0$:



Mehrdimensionale Taylor-Entwicklung

Berechnet die mehrdimensionale Taylor-Reihe von $g(x,y) = \cosh(x)\ln(y+a)$ mit $a > 0$ um den Entwicklungspunkt $(0,0)$ bis zur 2. Ordnung. Geht wie folgt vor:

- Gebt zunächst die allgemeine mehrdimensionale Taylorentwicklung einer Funktion $f(x,y)$ um den Entwicklungspunkt (x_0,y_0) bis zur 2. Ordnung (also bis zur quadratischen Näherung) an.
- Berechnet dann die einzelnen Terme der Taylor-Entwicklung für $g(x,y) = \cosh(x)\ln(y+a)$ um $(0,0)$.
- Zeigt, dass sich die Taylor-Entwicklung von $g(x,y) = \cosh(x)\ln(y+a)$ um $(0,0)$ zusammen fassen lässt zu:

$$g(x,y) = \ln(a) + \frac{y}{a} + \frac{1}{2}\ln(a)x^2 - \frac{1}{2}\frac{y^2}{a^2} + \mathcal{O}(\Delta x^3, \Delta y^3).$$

.

Lösungsskizze:

Mehrdimensionale Taylorentwicklung mir $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{\Delta x} = \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{pmatrix}$:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(\boldsymbol{x_0}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\boldsymbol{\Delta x} \cdot \nabla\right)^k f(\boldsymbol{x_0})$$

Für die mehrdimensionale Taylor-Reihe von $g(x,y)$ um $\boldsymbol{x_0} = (0,0)$ bis zur 2. Ordnung ergibt sich also:

$$f(x,y) = f(\boldsymbol{x_0}) + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} f(\boldsymbol{x_0}) + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} f(\boldsymbol{x_0}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\boldsymbol{x_0}) \Delta x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(\boldsymbol{x_0}) \Delta y^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(\boldsymbol{x_0}) \Delta x \Delta y$$

wobei $\Delta x = x - x_0$ bzw. $\Delta y = y - y_0$.
Ableitungen von $g(x,y)$:

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= \cosh(x)\ln(y+a),\ g(0,0) = \ln(a) \\
\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) &= \sinh(x)\ln(y+a),\ \frac{\partial}{\partial x} g(0,0) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) &= \frac{\cosh(x)}{y+a},\ \frac{\partial}{\partial y} g(0,0) = \frac{1}{a} \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,y) &= \cosh(x)\ln(y+a),\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(0,0) = \ln(a) \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} g(x,y) &= -\frac{\cosh(x)}{(y+a)^2},\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(0,0) = -\frac{1}{a^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(x,y) &= \frac{\sinh(x)}{y+a},\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(0,0) = 0
\end{aligned}$$

folgt Taylor-Reihe von $g(x,y)$

$$g(x,y) = \ln(a) + \frac{y}{a} + \frac{1}{2}\ln(a)x^2 - \frac{1}{2}\frac{y^2}{a^2} + \mathcal{O}(\Delta x^3, \Delta y^3).$$