Übung 5 Tp1a WS 24/25

* Extremum unter Nebenbedingungen (Lagrange-Multiplikatoren) *

Die Temperatur am Punkt (x,y) auf dem Einheitskreis ist gegeben mit $T(x,y) = 1 + xy$. Im Folgenden werdet ihr die Extremstellen von $T(x,y)$ auf zwei verschiedene Weisen bestimmen.

a) Überlegt euch als erstes wie die Nebenbedingung $g(x,y)$ für die Aufgabe formuliert werden kann.

b) Findet die Extremstellen von T zunächst, indem ihr die Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ in $T(x,y)$ einsetzt, sodass die Funktion T nur noch von x abhängt.

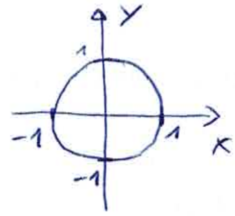
c) Nutzt nun die Methode der Lagrange-Multiplikatoren, um die Extremstellen zu bestimmen.

Lösungsskizze

a) Für alle Punkte auf dem Einheitskreis gilt:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$$

als Nebenbedingung nutzen



b) Nebenbedingung nach y umformen:

$$x^2+y^2-1 = 0 \iff y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

und in $T(x,y)$ einsetzen:

$$T(x, y(x)) = 1 \pm x\sqrt{1-x^2}$$

Um Extremstellen zu finden betrachten wir die Ableitung:

$$\frac{dT}{dx} = \pm\left[\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \pm\left[\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

An den Extremstellen ist $\frac{dT}{dx} = 0$, also

$$\pm\left[\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right] \stackrel{!}{=} 0 \iff 1-2x^2 = 0 \iff x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

x_1 in $y(x)$ einsetzen:

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{1-x_1^2} = \pm\sqrt{1-\tfrac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\rightarrow$ Extremstellen bei $\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

x_2 in $y(x)$ einsetzen:

$$y_{3,4} = \pm\sqrt{1-x_2^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\rightarrow$ Extremstellen bei $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Insgesamt also 4 Extremstellen

c) mit Lagrange - Multiplikator λ

$$\nabla\left(T(x,y) + \lambda g(x,y)\right) = 0$$

also gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T(x,y) + \lambda g(x,y)\right) = 0 \iff \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + xy + \lambda(x^2+y^2-1)\right) = 0$$

$$\iff y + 2\lambda x = 0$$

analog für part. Ableitung nach y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(T(x,y) + \lambda g(x,y)\right) = 0$$

$$\iff x + 2\lambda y = 0$$

zusammen mit der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$y + 2\lambda x = 0 \quad (1)$$
$$x + 2y\lambda = 0 \quad (2)$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

aus (1) folgt: $y = -2\lambda x$

einsetzen in (2) liefert: $x - 4\lambda^2 x = 0 \iff \lambda = \pm \frac{1}{2}$

λ einsetzen in (1) (oder (2)) zeigt uns:

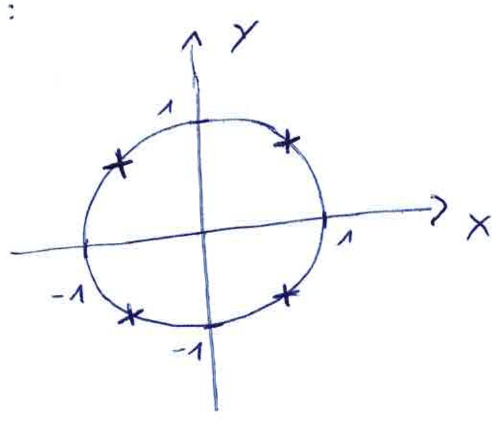
$$\left.\begin{aligned} y &= -2\lambda x = -2\cdot\left(\pm\tfrac{1}{2}\right)x = \mp x \\ \text{bzw. } x &= -2\lambda y = \mp y \end{aligned}\right\} \text{ also: } x = y \ \vee \ y = -x$$

mit (3) folgt: $x^2 + y^2 = 1 \iff 2x^2 = 1 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

damit haben wir 4 Extremstellen gefunden:

$y = x \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y = -x \Rightarrow x = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}, \ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$



* Integrationsgrenzen *

Bestimmt die Integrationsgrenzen für die Integration

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

einer Funktion $f(x,y)$, die über die folgenden Flächen Ω_i integriert werden soll. Skizziert das jeweilige Integrationsgebiet.

a) $\Omega_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x+y \leq 1 \, ; \; x,y \geq 0 \}$

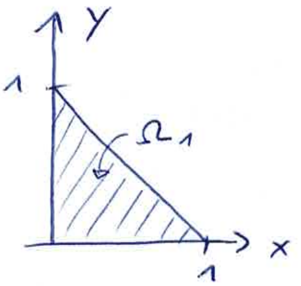
b) Ω_2 ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $(0,1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$. Wie kann die Fläche Ω_1 analog zu Ω_2 als Punktmenge $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ geschrieben werden?

c) Ω_3 ist ein Dreieck mit Eckpunkten $(0,0)$, $(1,1)$ und $(1,0)$.

d) Ω_4 ist ein Dreieck mit Eckpunkten $(0,0)$, $(1,1)$ und $(0,1)$.

Lösungsskizze:

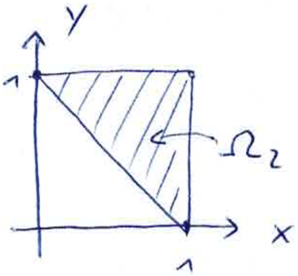
a)



$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x+y \leq 1;\ x,y \geq 0\}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, f(x,y) = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx\, f(x,y)$$

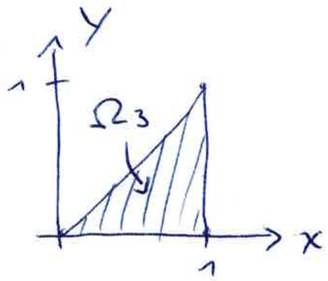
b)



$$\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 1;\ 0 \leq x,y \leq 1\}$$

$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^1 dy\, f(x,y) = \int_0^1 dy \int_{1-y}^1 dx\, f(x,y)$$

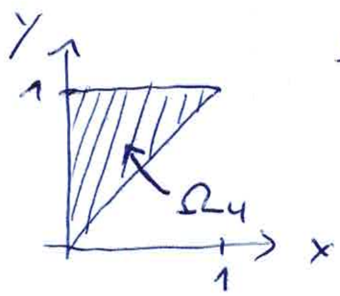
c)



$$\Omega_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x;\ 0 \leq x,y \leq 1\}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy\, f(x,y) = \int_0^1 dy \int_y^1 dx\, f(x,y)$$

d)



$$\Omega_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x;\ 0 \leq x,y \leq 1\}$$

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy\, f(x,y) = \int_0^1 dy \int_1^y dx\, f(x,y)$$