Übung 2 TP1a

Partialbruchzerlegung

→ rationale Funktionen in Integration

Beispiel: $I(z) = \int_0^z \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}\,dx = \int_0^z \frac{x+2}{(x-3)(x-1)(x+1)}\,dx$

Faktorisierung von Polynomen

nullstellen

Ansatz: $f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-1)(x+1) + B(x-3)(x+1) + C(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-1)(x+1)}$

erweiterung

ausmultiplizieren und ausklammern $= \frac{(A+B+C)x^2 + (-2B-4C)x + (-A-3B+3C)}{(x-3)(x-1)(x+1)}$

Vergleihen mit $I(z)$ folgt:
$$\left.\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -2B-4C &= 1 \\ -A-3B+3C &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \frac{5}{8} \quad B = -\frac{3}{4} \quad C = \frac{1}{8}$$

A, B und C in den Ansatz und das Integral lösen:

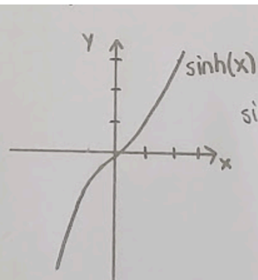
$$I(z) = \int_0^z \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}\,dx = \int_0^z \frac{5/8}{x-3} + \frac{-3/4}{x-1} + \frac{1/8}{x+1}\,dx = \ldots$$
$$= \frac{5}{8}\ln|z-3| - \frac{3}{4}\ln|z-1| + \frac{1}{8}\ln|z+1|$$

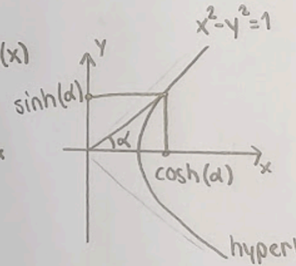
Tipp: Anzahl der Koeffizienten A,B,C,... hängt davon ab, wie viele Nullstellen das Polynom hat.

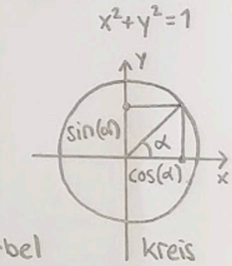
Ableitung Umkehrfunktion

Sinus Hyperbolikus $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Kosinus Hyperbolikus $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$







Ableitung sinh(x):

$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

Ableitung der Umkehrfunktion arsinh(x):

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(y)}} \quad \text{also} \quad \left(\operatorname{arsinh}(y)\right)' = \frac{1}{\left.(\sinh(x))'\right|_{x=\operatorname{arsinh}(y)}} = \frac{1}{\left.\cosh(x)\right|_{x=\operatorname{arsinh}(y)}}$$

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ $\nearrow$ $= \left.\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(x)}}\right|_{x=\operatorname{arsinh}(y)}$

$\sinh(\operatorname{arsinh}(y)) = y$ $\nearrow$ $= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

Partielle Integrale

von Vorlesung: $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ oder $u(x)$ und $v(x)$ im Übungsblatt

Beispiel: $\int x^2 \cos(x)\,dx$

wähle $f'(x)$ und $g(x)$: $f'(x) = \cos(x) \rightarrow f(x) = \sin(x)$

$g(x) = x^2 \rightarrow g'(x) = 2x$

$\Rightarrow \int x^2 \cos(x)\,dx$

$= x^2 \sin(x) - \underbrace{\int 2x \sin(x)\,dx}$

Am Ende wollten wir nur etwas haben das wir integrieren können, deswegen $g(x) = x^2$ weil die Ableitungen $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$ $\rightarrow x^2$ "entfernt" und $f(x) = \sin(x)$ "leicht"

wähle nochmal

$f'(x) = \sin(x) \rightarrow f(x) = -\cos(x)$

$g(x) = 2x \rightarrow g'(x) = 2$

Tipp: oft sinnvol $\sin(x)$, $\cos(x)$ oder etwas mit e^x als $f'(x)$ zu wählen und Polynomen als $g(x)$

und $\int x^2 \cos(x)\,dx = x^2 \sin(x) - \left(-2x\cos(x) - \int 2(-\cos(x))\,dx\right)$

$= x^2 \sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C$