Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik Ia – Rechenmethoden der Mechanik

Dr. habil. Philipp Hövel, Katharina Scherer, Noora Aho, Joshua Weißenfels, Max Lauer

WiSe 2024/25 **Blatt 5** **Abgabe 27.11.2024**

Aufgabe 17 *Extremum unter Nebenbedingungen und Lagrange-Multiplikator (10 Punkte)*

Betrachtet die Funktion $f(x,y) = 5 - x^2 - \frac{1}{2}y^2$. Gesucht ist das Extremum von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x + y - 2 = 0$.

a) Findet die Extremstelle von f zunächst, indem ihr die Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ in $f(x,y)$ einsetzt, sodass die Funktion f nur noch von x abhängt. *(4 Punkte)*

b) Nutzt nun die Methode der Lagrange-Multiplikatoren, um die Extremstelle zu bestimmen. *(5 Punkte)*

c) Überprüft euer Ergebnis graphisch mithilfe eines 3D-Plotting-Tools eurer Wahl. *(1 Punkt)*

Hintergrund: Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren hat viele Anwendungen in der Physik. Wichtiges Beispiel aus der statistischen Physik: Die Boltzmann-Verteilung $p_i \propto e^{-E_i/kT}$, welche die Verteilung von Zuständen i eines komplexen Systems bei gegebener Temperatur T beschreibt (Quantensystem, Protein, Sternengase etc.). Man erhält die Boltzmann-Verteilung, indem man die Entropie *maximiert* unter den *Nebenbedingungen*, dass (i) die Verteilung normiert ist ($\sum_i p_i = 1$) und (ii), dass die mittlere Energie durch die Verteilung $\sum_i p_i E_i = \bar{E}$ gegeben ist. Einer der Lagrange-Multiplikatoren nimmt dann gerade den Wert der inversen Temperatur $1/kT$ an.

Aufgabe 18 *Integration von Funktionen in mehreren Variablen (10 Punkte)*

Die Integration in mehreren Dimensionen entspricht der wiederholten Ausführung von mehreren Integrationen über jeweils eine Variable. Die Festlegung der Integrationsgrenzen geschieht hierbei wie folgt:

- Man wählt zunächst eine Variable, über die man die letzte (d.h. äußerste) Integration durchführen möchte. Für diese Variable muss man den kleinst- bzw. größtmöglichen Wert angeben können.
- Die Integrationsgrenzen der inneren Integrale dürfen von der Integrationsvariable der äußeren Integrale abhängen, aber nicht umgekehrt.
- Die Reihenfolge zweiter Integrationen darf nur dann vertauscht werden, wenn die Integrationsgrenzen des inneren Integrals nicht von der Integrationsvariable des äußeren Integrales abhängt.

Beispiele:

- $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y\, f(x,y) = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_1^2 \mathrm{d}x\, f(x,y)$
- $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y\, f(x,y)$: Integrale können nicht vertauscht werden. Fläche ist ein Dreieck mit Ecken $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$.
- $\int_1^y \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y\, f(x,y)$ ist ein unsinniger (oder zumindest extrem verwirrender) Ausdruck.

Löst die folgenden Integrale und skizziert jeweils das Integrationsgebiet:

a)

$$\int_\Omega xyz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z; \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x,y,z \le 1\}$$

(3 Punkte)

b)

$$\int_\Omega e^{x+y} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y; \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \ge 0,\ 0 \le\ x+y \le 2\}$$

(3 Punkte)

c)

$$\int_\Omega (x+z) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z; \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \ge 0,\ x+y+z \le 1\}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 19 *Anwendung: Schwerpunkt eines Halbkreises* *(9 Punkte)*

Der Schwerpunkt $S = (x_s, y_s)$ einer (zweidimensionalen) Massenverteilung $\mathcal{K}$ mit Dichte $\rho(x,y)$ ergibt sich wie folgt:

$$x_s = \frac{1}{M}\int_\mathcal{K} x\,\rho(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \qquad\qquad y_s = \frac{1}{M}\int_\mathcal{K} y\,\rho(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$$

mit der Gesamtmasse M: $M = \int_\mathcal{K} \rho(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$. Betrachtet eine Platte in Form eines Halbkreises, d.h. $-R \le x \le R$ und $0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$ mit der konstanten Massendichte $\rho = M/A$, wobei A die Fläche des Halbkreises ist.

a) Berechnet die Fläche A der Platte durch eine geeignete Integration, um ρ als Funktion von M und R auszudrücken. **Hinweis:** Das Integrale ähnelt sehr dem Integral $\int \mathrm{d}x\sqrt{1-x^2}$, das in der Vorlesung vorkam. *(3 Punkte)*

b) Bestimmt die Koordinaten des Schwerpunktes der Platte. *(4 Punkte)*

c) Skizziert den Halbkreis und tragt den Schwerpunkt ein. *(2 Punkte)*

Aufgabe 20 *Anwendung: Schwerpunkt einer Pyramide* *(11 Punkte)*

Wir betrachten eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche (Seitenlänge a), Höhe h und homogener Massendichte ρ. Die Grundfläche der Pyramide soll in der (x,y)-Ebene liegen.

a) Berechnet zunächst das Volumen $V = \int_{\text{Pyramide}} \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$ und somit die Masse $M = \rho V$ der Pyramide.
Hinweis: Hierzu müsst ihr zuerst eine geeignete Parametrisierung der Pyramide finden, um die Integrationsgrenzen festzulegen. Diese Grenzen hängen davon ab, wie ihr die Pyramide in $\mathbb{R}^3$ positioniert. Dabei ist eine Skizze sicher sehr hilfreich, um uns eure gewählte Positionierung klarzumachen. *(5 Punkte)*

b) Gebt (ohne Rechnung) die Schwerpunktskoordinaten x_s und y_s an. Begründet eure Antwort. *(2 Punkte)*

c) Berechnet die z-Koordinate des Schwerpunkts, also $z_s = M^{-1}\int_{\text{Pyramide}} z\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$. *(4 Punkte)*