Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik Ia – Rechenmethoden der Mechanik

Dr. habil. Philipp Hövel, Katharina Scherer, Noora Aho, Joshua Weißenfels, Max Lauer

WiSe 2024/25 **Blatt 6** **Abgabe 04.12.2024**

Aufgabe 21 *Schwerpunktberechnung in Polarkoordinaten* *(5 Punkte)*

Oft lassen sich Rechnungen durch die geeignete Wahl passender Koordinatensysteme wesentlich vereinfachen. Wir betrachten erneut den Schwerpunkt des Halbkreises aus Aufgabe 19 von Blatt 5. Benutzt nun ebene Polarkoordinaten, um erneut den Schwerpunkt des Halbkreises zu bestimmen.

Aufgabe 22 *Kegel mit Zylinderkoordinaten* *(7 Punkte)*

Wir betrachten einen Kreiskegel mit Höhe h, Grundfläche mit Radius R und homogener Massendichte ρ. Die Grundfläche liegt symmetrisch um den Ursprung in der (x,y)-Ebene. Die Spitze des Kegels ist bei $(0, 0, h)$.

a) Bestimmt zuerst das Volumen des Kegels. Verwendet Zylinderkoordinaten. *(4 Punkte)*

b) Berechnet nun den Schwerpunkt des Kegels. *(3 Punkte)*

Aufgabe 23 *Trägheitsmomente* *(18 Punkte)*

Die Newtonsche Bewegungsgleichung eines Teilchens $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{x}}$ (Kraft gleich Masse mal Beschleunigung, $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$) gilt für Translationsbewegungen. Die Masse m gibt hierbei die *Trägheit* des Teilchens an, also der Widerstand des Teilchens gegenüber einer Änderung seiner Geschwindigkeit. Die analoge Gleichung für Rotationsbewegungen lautet $M = J\ddot{\phi}$, wobei M das Drehmoment, J das Trägheitsmoment und $\ddot{\phi}$ die Winkelbeschleunigung ist. Das Trägheitsmoment ist definiert als

$$J = \int \rho(x, y, z)\,(r_\perp)^2\,\mathrm{d}V,$$

wobei $\rho(x, y, z)$ die Dichte ist und $r_\perp$ der Abstand von der Rotationsachse. Beispiel: Bei Rotation um die z-Achse wäre $r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$. Das Trägheitsmoment gibt also den Widerstand des Körpers gegenüber einer Änderung seiner Winkelgeschwindigkeit an.

Berechnet die Trägheitsmomente folgender Körper der Masse M, jeweils für Rotationen um ihren Schwerpunkt. Alle Körper haben eine homogene Dichte, also $\rho(x, y, z) = \text{const}$. Drückt J jeweils über die Masse M und die Abmessungen des Körpers aus.

Hinweis: Um die Integration durchzuführen, müsst ihr $r_\perp$ durch die Integrationsvariablen ausdrücken.

a) Quader mit Kantenlängen a, b, c für eine Rotation um die drei möglichen Achsen parallel zu den Kanten des Quaders. *(5 Punkte)*

b) Zylinder mit Radius R und Höhe h für Rotation um seine Symmetrieachse.
Hinweis: Verwendet Zylinderkoordinaten. *(4 Punkte)*

c) Zylinder mit Radius R und Höhe h für Rotation um eine Achse, die senkrecht auf seiner Symmetrieachse steht.
Zur Kontrolle: $J = M\left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}h^2\right)$ *(4 Punkte)*

d) Kugel mit Radius R für Rotation um die drei Symmetrieachsen.
Hinweis: Verwendet Kugelkoordinaten. Zur Kontrolle: $J = \frac{2}{5}MR^2$ *(5 Punkte)*

e) Freiwillige Zusatzaufgabe: Wiederholt die Berechnung für die Kugel, aber verwendet nun kartesische Koordinaten. Wie viel umständlicher war die Rechnung?